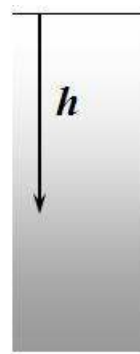


-3 Давление на глубине. Часть 1

Условие

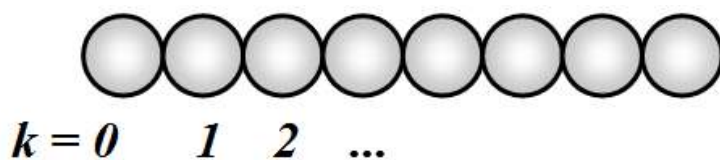
Задание 10-3 Давление на глубине.



Часть 1.

1.1 Запишите формулу, описывающую зависимость давления воды в океане от глубины погружения $P(h)$. Плотность жидкости ρ , глубина погружения значительно меньше радиуса Земли, ускорение свободного падения g . Атмосферным давлением пренебречь.

Часть 2. Одномерная цепочка.

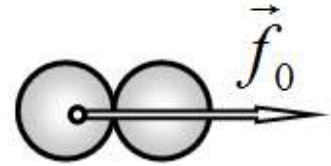
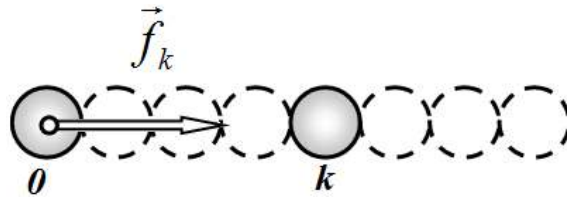


В данной части рассматривается длинная одномерная цепочка одинаковых соприкасающихся шариков, массы которых равны m , диаметр - D . Между шариками действуют силы гравитационного притяжения и силы упругости. Цепочка шариков находится в равновесии. Внешние силы отсутствуют. Нумерация шариков начинается с нуля.

При решении задачи вам может понадобиться следующая математическая формула для бесконечной суммы

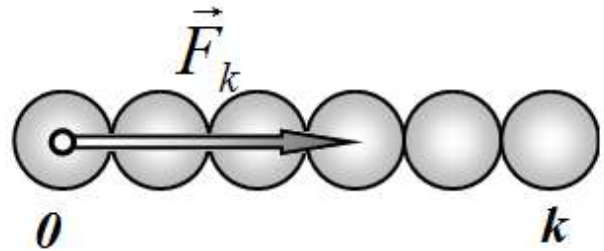
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2.1 Чему равна сила взаимодействия двух соприкасающихся шариков? Обозначим модуль этой силы f_0 . Далее будем рассчитывать все силы, нормируя их на значение f_0 .

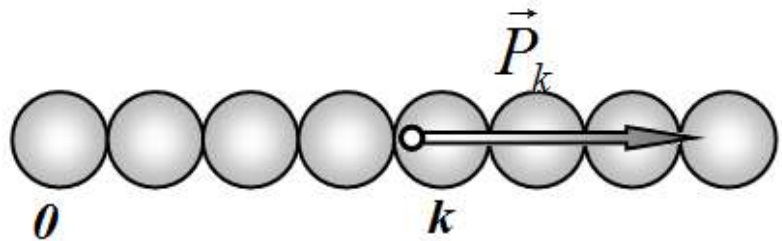


2.2 Чему равна сила f_k взаимодействия крайнего шарика с шариком номер k ? Рассчитайте численные значения отношений $\frac{f_k}{f_0}$ для $k = 1, 2, 3, \dots, 10$. К какому значению стремиться это отношение при $k \rightarrow \infty$? Результаты расчетов запишите в таблицу 1.

2.3 Чему равна сила F_k гравитационного взаимодействия крайнего шарика с цепочкой, состоящей из k шариков? Рассчитайте численные значения отношений $\frac{F_k}{f_0}$ для $k = 1, 2, 3, \dots, 10$. К какому значению стремиться это отношение при $k \rightarrow \infty$? Результаты расчетов запишите в таблицу 1.



2.4 Теперь рассмотрим бесконечную (в одну сторону) цепочку. Чему равна сила упругости P_k , действующая на шарик номер k со стороны предыдущего шарика?



Рассчитайте численные значения отношений $\frac{P_k}{f_0}$ для $k = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Результаты расчетов запишите в таблицу 1.

2.5 Как зависит отношение $\frac{P_k}{f_0}$ от k при $k \rightarrow \infty$?

Таблица 1.

Численные расчеты проведите с точностью до третьего знака после запятой (10^{-3})

При необходимости таблицу можете расширить.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
$\frac{f_k}{f_0}$											
$\frac{F_k}{F_0}$											
$\frac{P_k}{P_0}$											

Решение

Задание 10-3 Давление на глубине.

Часть 1.

1.1 Давление описывается известной формулой

$$P = \rho gh \quad (1)$$

Часть 2.

2.1 Сила взаимодействия определяется законом всемирного тяготения И. Ньютона

$$f_0 = G \frac{m^2}{D^2}. \quad (2)$$

2.2 Сила взаимодействия между нулевым и k -тым шариками равна

$$f_k = G \frac{m^2}{(kD)^2} = \frac{1}{k^2} f_0. \quad (3)$$

При $k \rightarrow \infty$ сила взаимодействия стремится к нулю $f_\infty = 0$.

2.3 Так как для гравитационных сил справедлив принцип суперпозиции. То сила, действующая на крайний шарик, равна сумме сил, действующих со стороны всех шариков

$$F_k = \sum_{i=1}^k f_i = f_0 \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \quad (4)$$

Для численного расчета удобно провести последовательное суммирование по рекуррентной формуле

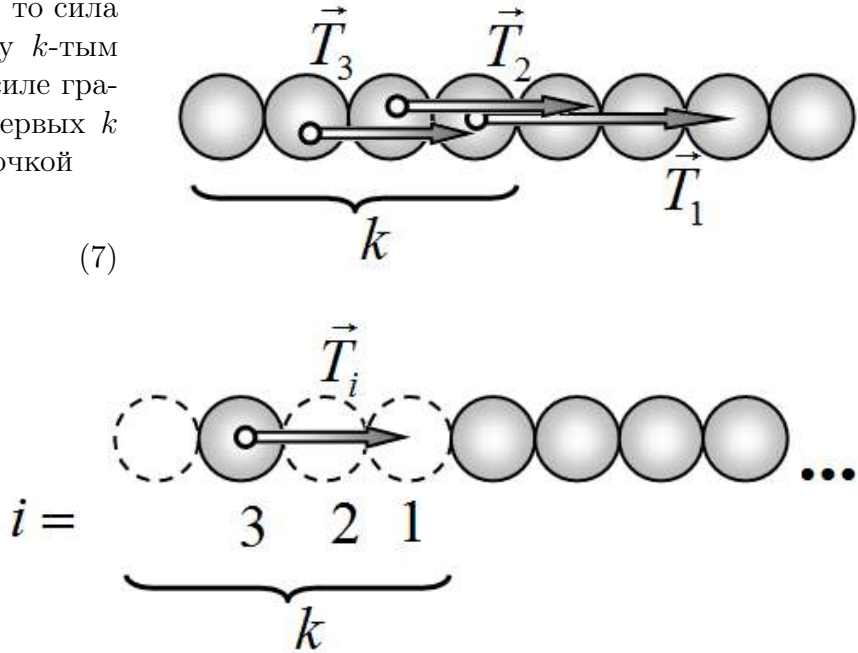
$$\frac{F_k}{f_0} = \frac{F_{k-1}}{f_0} + \frac{f_k}{f_0}. \quad (5)$$

При $k \rightarrow \infty$ сила взаимодействия стремится к предельному значению

$$F_{\infty} = f_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = f_0 \frac{\pi^2}{6}. \quad (6)$$

2.4 Рассмотрим первых k шариков. Так как они находятся в равновесии, то сила упругого взаимодействия между k -тым и предыдущим шариком равна силе гравитационного взаимодействия первых k шариков с полубесконечной цепочкой

$$P_k = T_1 + T_2 + \dots T_k, \quad (7)$$



Здесь T_i ($i = 1, 2, \dots k$) сила притяжения шарика номер i с полубесконечной цепочкой. Нумерацию по i удобно вести в обратном направлении.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} T_1 &= F_{\infty} \\ T_2 &= F_{\infty} - F_1 \\ T_3 &= F_{\infty} - F_2 \\ &\dots \\ T_i &= F_{\infty} - F_{i-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 1, в которой добавлена строка для расчета сил T_k .

2.4 Запишем в явном виде выражение для силы P_k при больших k , используя непосредственно закон всемирного тяготения

$$\begin{aligned} \frac{P_k}{f_0} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Из этой записи следует, при очень больших k данное отношение ведет себя так же, как гармонический ряд, т.е.

$$\frac{P_k}{f_0} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} . \quad (10)$$

Известно, что сумма такого ряда стремится к бесконечности, причем так же, как $\ln k$, иными словами

$$P_k \approx f_0 \ln k . \quad (11)$$

Таблица 1. Результаты расчетов.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----------

$\frac{f_k}{f_0}$	1,000	0,250	0,111	0,063	0,040	0,028	0,020	0,016	0,012	0,010	0
$\frac{F_k}{f_0}$	1,000	1,250	1,361	1,424	1,464	1,491	1,512	1,527	1,540	1,550	1,645
$\frac{T_k}{f_0}$	1,645	0,645	0,395	0,284	0,221	0,181	0,154	0,133	0,118	0,105	0
$\frac{P_k}{f_0}$	1,645	2,290	2,685	2,969	3,190	3,371	3,525	3,658	3,775	3,881	$\ln k$