

-2. Шарик на нити

Условие

Задача 10-2. Шарик на нити.

Небольшой массивный шарик подвешен на гибкой невесомой нерастяжимой нити и может вращаться в вертикальной плоскости. Второй конец нити закреплен в точке C . Шарiku сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, направленную горизонтально. В зависимости от этой скорости движение шарика будет различным.

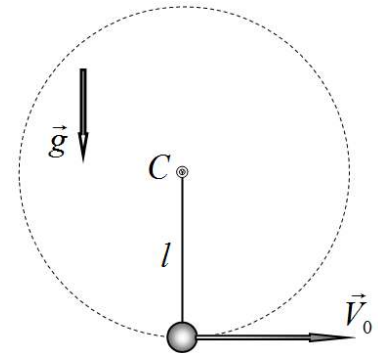
В данной задаче Вам необходимо рассмотреть различные варианты этого движения.

Сопротивлением воздуха следует пренебречь.

Часть 1. Полный оборот.

1.1 При какой минимальной скорости V_0 шарик сделает полный оборот вокруг точки подвеса C ?

1.2 Найдите время полного оборота при этой минимальной начальной скорости. Получите приближенную формулу, относительная погрешность которой не превышает 5%.



Часть 2. Попадание в точку подвеса.

2.1 При какой начальной скорости $\vec{V}_0$ шарик в процессе движения попадет в точку подвеса C ?

Нарисуйте схематически траекторию движения в этом случае. Кратко опишите характер движения шарика в этом случае.

Часть 3. Попадание в точку старта.

При некоторой начальной скорости $\vec{V}_0$ шарик будет двигаться по дуге окружности до некоторой точки. Затем нить сомнется, после чего шарик, двигаясь свободно по параболе, попадет в нижнюю точку старта.

3.1 Найдите начальную скорость $\vec{V}_0$, при которой реализуется описанная траектория.

Решение

Задача 10-2. Шарик на нити.

Часть 1. Полный оборот.

1.1 Чтобы шарик сделал полный оборот мало, чтобы он поднялся в верхнюю точку траектории. Необходимо, чтобы в верхней точке шарик имел скорость v_1 достаточную для того, чтобы нить оставалась натянутой, т.е. сила натяжения $\vec{T}$ должна быть чуть больше нуля.

Для определения этой скорости запишем уравнение второго закона Ньютона для шарика в верхней точке в проекции на вертикальную ось:

$$m \frac{v_1^2}{l} = mg + T, \quad (1)$$

Здесь $\frac{v_1^2}{l}$ - центростремительное ускорение шарика.

Из уравнения (1) следует, что эта скорость должна удовлетворять условию

$$T \geq 0 \Rightarrow v_1^2 \geq gl. \quad (2)$$

Чтобы найти скорость в нижней точке можно воспользоваться законом сохранения механической энергии

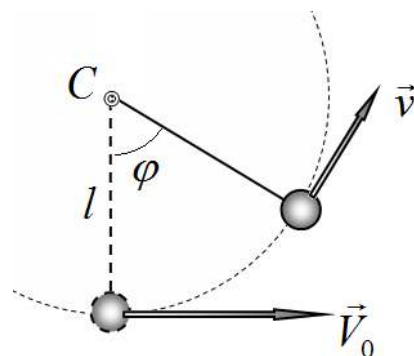
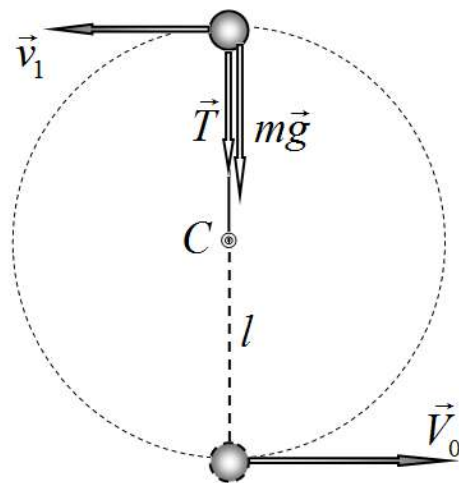
$$\frac{mv_1^2}{2} + 2mgl = \frac{mV_0^2}{2}. \quad (3)$$

Из этого уравнения следует (с учетом соотношения (2)), что минимальная скорость равна

$$V_0^2 = v_1^2 + 4gl = 5gl \Rightarrow V_0 = \sqrt{5gl}. \quad (4)$$

1.2 Для расчета времени одного оборота найдем зависимость модуля скорости шарика от угла отклонения от вертикали φ . Для этого опять воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) &= \frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow \\ v &= \sqrt{V_0^2 + 2gl(1 - \cos \varphi)} = \sqrt{gl(7 - 2 \cos \varphi)} \end{aligned} \quad (4)$$



Скорость сложным образом зависит от его координаты. Поэтому приближенный расчет времени движения может быть проведен численно. Для этого необходимо вычислить сумму

$$T = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{v_k}. \quad (5)$$

Для строго расчета необходимо устремить шаг $\Delta\varphi$ к нулю, в этом случае сумма перейдет в соответствующий интеграл. Однако этот интеграл не выражается через элементарные функции, поэтому все равно должен вычисляться численно.

Подставим выражение для скорости (4) в формулу для периода вращения (5)

$$T = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{v_k} = \sum_k \frac{l\Delta\varphi}{\sqrt{gl(7 - 2\cos\varphi_k)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sum_k \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{(7 - 2\cos\varphi_k)}} = C\sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6)$$

Так как время подъема равно времени опускания шарика равны, то для ускорения расчета достаточно вычислить сумму для угла φ в пределах от 0 до π .

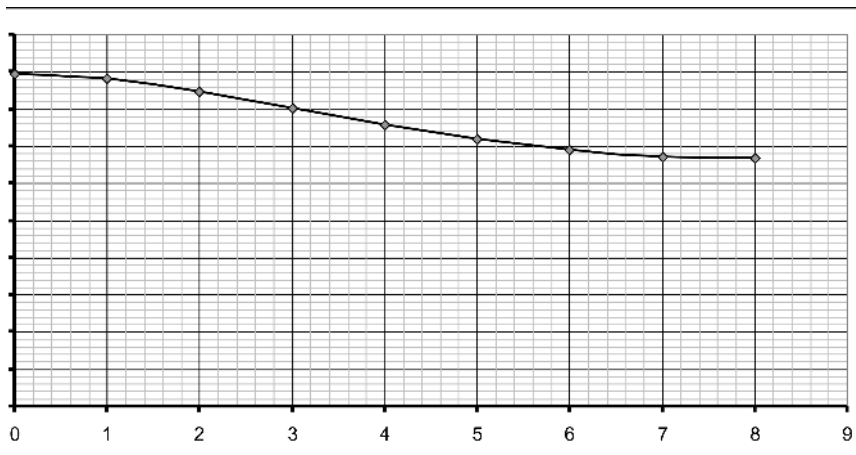
Построим «по точкам» график функции $f(\varphi_k) = \frac{1}{\sqrt{(7 - 2\cos\varphi_k)}}$ с шагом $\Delta\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Таблица значений функции $f(\varphi_k)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_k	$0 \cdot \frac{\pi}{8}$	$1 \cdot \frac{\pi}{8}$	$2 \cdot \frac{\pi}{8}$	$3 \cdot \frac{\pi}{8}$	$4 \cdot \frac{\pi}{8}$	$5 \cdot \frac{\pi}{8}$	$6 \cdot \frac{\pi}{8}$	$7 \cdot \frac{\pi}{8}$	$8 \cdot \frac{\pi}{8}$
f_k	0,447	0,441	0,423	0,400	0,378	0,359	0,345	0,336	0,333

Ниже показан график этой функции.

k	0	1
φ_k	$0 \cdot \frac{\pi}{8}$	$1 \cdot \frac{\pi}{8}$
f_k	0,447	0,441



Функция изменяется достаточно медленно, поэтому расчет по 8 рассчитанным точкам должен дать результат с хорошей точностью. Проведенное численное суммирование по этим точкам привело к результату $C = 2,413$. Если считать, что движение является равноускоренным (то есть просуммировать по двум крайним точкам), то получается значение $C = 2,45$ - различие меньше 5%. Поэтому окончательно формула для времени одного оборота следующая

$$T \approx 2,41 \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (7)$$

Часть 2. Попадание в точку подвеса.

2.1 Если начальная скорость шарика не достаточна для того, чтобы шарик достиг верхней точки, то сначала он будет двигаться по дуге окружности радиуса l (на этом участке нить подвеса натянута). Когда сила натяжения нити стане равной нулю, нить изогнется, а шарик дальше будет двигаться по параболе.

Пусть сила натяжения нити стала равной нулю в некоторой точке A (см. рис.), положение которой будем задавать углом наклона нити к горизонту α . На основании 2 закона Ньютона для шарика, находящегося в точке A , можно записать уравнение

$$\frac{mv^2}{l} = T + mg \sin \alpha \quad (8)$$

Так как в этой точке сила натяжения равна нулю, то скорость v в этой точке связана с углом α следующим соотношением

$$v^2 = gl \sin \alpha \quad (9)$$

Второе уравнение, связывающее эти параметры, следует из закона сохранения механической энергии

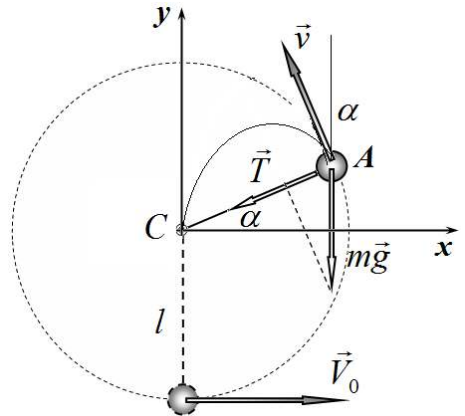
$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1 + \sin \alpha) = \frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$V_0^2 = v^2 + 2gl(1 + \sin \alpha) \quad (10)$$

Введем систему координат, как показано на рисунке. Запишем закон движения шарика после точки A , при движении по параболе в поле тяжести земли. (с учетом координат начальной точки A и проекций скорости):

$$\begin{cases} x = l \cos \alpha - (v \sin \alpha) \cdot t \\ y = l \sin \alpha + (v \cos \alpha) \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (9)-(11) позволяют полностью описать движение шарика. Пусть шарик попадает в точку подвеса в некоторый момент времени t_1 , в этот момент времени $x = 0$, $y = 0$, поэтому из закона движения (11) следует



$$x = l \cos \alpha - (v \sin \alpha) \cdot t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{l \cos \alpha}{v \sin \alpha}$$

$$y = l \sin \alpha + (v \cos \alpha) \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l \sin \alpha + (v \cos \alpha) \frac{l \cos \alpha}{v \sin \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{l \cos \alpha}{v \sin \alpha} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{l}{\sin \alpha} - \frac{gl^2 \cos^2 \alpha}{2v^2 \sin^2 \alpha} = 0 \quad (12)$$

Подставим выражение (9) для квадрата скорости и получим уравнение для угла α

$$\frac{l}{\sin \alpha} - \frac{gl^2}{2gl \sin \alpha} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = 1. \quad (13)$$

Решая это уравнение, получим единственное значения угла α :

$$\cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

Теперь с помощью уравнений (9)-(10) не сложно найти требуемую начальную скорость

$$V_0^2 = v^2 + 2gl(1 + \sin \alpha) = gl \sin \alpha + 2gl(1 + \sin \alpha) = gl(2 + 3 \sin \alpha) = gl(2 + \sqrt{3}) \quad (15)$$

Окончательный ответ этой части задачи:

$$V_0 = \sqrt{gl(2 + \sqrt{3})}. \quad (16)$$

Часть 3. Попадание в точку старта.

В этом случае характер движения и уравнения (9)-(11), его описывающие, такие же, как в предыдущей части. Только в этом случае надо задать другие конечные условия. Пусть шарик попадает в начальную точку в некоторый момент времени t_2 , в этот момент времени $x = 0$, $y = -l$, поэтому уравнение для определения угла α несколько изменится

$$\begin{aligned} x &= l \cos \alpha - (v \sin \alpha) \cdot t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{l \cos \alpha}{v \sin \alpha} \\ y &= l \sin \alpha + (v \cos \alpha) \cdot t_2 - \frac{g}{2} t_2^2 = -l \quad \Rightarrow \quad l \sin \alpha + (v \cos \alpha) \frac{l \cos \alpha}{v \sin \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{l \cos \alpha}{v \sin \alpha} \right)^2 = -l \quad \Rightarrow \\ &\frac{l}{\sin \alpha} - \frac{gl^2 \cos^2 \alpha}{2v^2 \sin^2 \alpha} = -l \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановки выражения (9) получим

$$\frac{l}{\sin \alpha} - \frac{gl^2}{2gl \sin \alpha} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -l \Rightarrow \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = 0 \Rightarrow \quad (18)$$

$$\sin^3 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} = 0$$

Формально мы получили кубическое уравнение относительно величины $z = \sin \alpha$:

$$2z^3 + 3z^2 - 1 = 0. \quad (19)$$

Не сложно найти один из корней этого уравнения $z = -1$, что позволяет преобразовать к виду

$$2z^3 + 3z^2 - 1 = 2z^3 + 2z^2 + z^2 - 1 = 2z^2(z + 1) + (z + 1)(z - 1) = (z + 1)(2z^2 + z - 1) = 0$$

Корень этого уравнения $z = -1$ не является решением системы уравнений. Так при этом значении синуса угла не выполняется уравнение (9). Тогда оставшиеся корни являются корнями квадратного уравнения

$$2z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}, \quad z_2 = -1$$

Таким образом, единственным корнем системы уравнений является значение

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

Наконец, с помощью выражения (15) находим требуемую начальную скорость

$$V_0 = \sqrt{gl(2 + 3 \sin \alpha)} = \sqrt{\frac{7}{2}} gl$$