

-2 Энергия катящегося тела

Условие

Задача 10-2 Энергия катящегося тела.

Оборудование: наклонная плоскость, штатив (или кусок пластилина), трубка металлическая, цилиндр металлический, линейка, секундомер с памятью этапов.

Если вы не умеете пользоваться секундомером с памятью этапов – обращайтесь к организаторам олимпиады!

Кинетическая энергия тела движущегося поступательно определяется по известной формуле

$$E_0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Если тело катится по поверхности без проскальзывания, то в его кинетическую энергию вносит вклад и вращательное движение. Для осесимметричного тела кинетическая энергия может быть представлена в виде

$$E = C \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

где m - масса тела, v - скорость движения центра масс, C - безразмерный коэффициент, зависящий от распределения масс внутри тела.

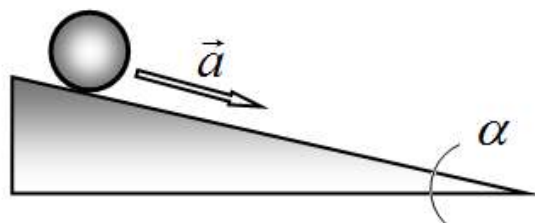
Целью данной работы является экспериментальное определение коэффициентов C для двух тел: трубки и сплошного цилиндра.

Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Часть 1. Теоретическая.

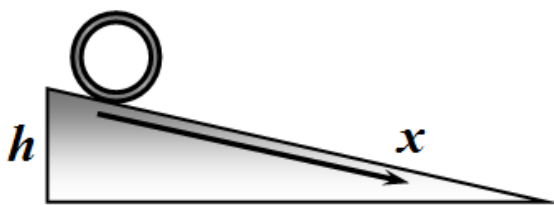
1.1 Цилиндрическое тело с известным коэффициентом C скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Пренебрегая сопротивлением воздуха и трением качения, рассчитайте ускорение центра масс тела a .

1.2 Получите формулу, позволяющую по известным ускорению a и углу наклона α рассчитать коэффициент C в формуле (1).



Часть 2. Качение трубки и цилиндра.

Закрепите наклонную плоскость под небольшим углом к горизонту (чтобы время скатывания было измеряемым). 2.1 Измерьте угол наклона плоскости к горизонту.



Исследуйте качение трубки по наклонной плоскости.

2.2 Измерьте зависимость координаты трубки от времени $x(t)$ (используйте память секундомера). Постройте график полученной зависимости. 2.3 Покажите, что движение трубки можно считать равноускоренным. Рассчитайте ускорение трубки. 2.4 Рассчитайте значение коэффициента C для трубки. Оцените погрешность найденного значения.

Выполните пункты заданий 2.2 – 2.4 для сплошного цилиндра.

Часть 3. Зависимость ускорения от угла наклона.

В этой части оценка погрешностей не требуется! Измерения проводите только для трубки.

Для расчета ускорения при равноускоренном движении достаточно знать значения координат x_1 , x_2 в два фиксированных момента времени t_1 , t_2 , соответственно.

3.1 Получите формулу, позволяющую по двум измеренным временам прохождения двух отметок рассчитать ускорение тела.

3.2 Измерьте зависимость ускорения трубки при ее качении по наклонной плоскости от угла наклона плоскости. Укажите, какие величины вы измеряли, по каким формулам рассчитывали ускорение и угол наклона.

3.3 Постройте график зависимости ускорения трубки от угла наклона плоскости.

3.4 Используя полученные в этой части результаты, еще раз рассчитайте значение коэффициента C для трубки.

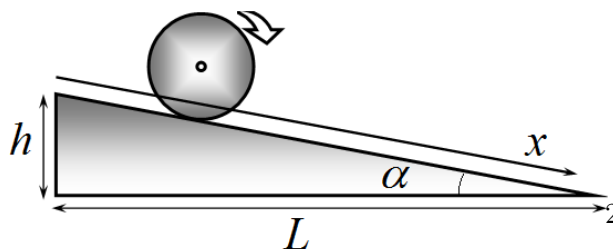
Решение

Задача 10-2 Энергия катящегося тела.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Запишем закон сохранения механической энергии при скатывании тела

$$C \frac{mv^2}{2} - C \frac{mv_0^2}{2} = mg\Delta h. \quad (1)$$



Здесь $\Delta h = x \sin \alpha$ уменьшение высоты центра тела, при его смещении на расстояние x вдоль наклонной плоскости. Возможно, что в начальный момент времени тело имеет некоторую начальную скорость v_0 .

Запишем также кинематическое соотношение, справедливое при равноускоренном движении

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (2)$$

Подставляя выражение $v^2 - v_0^2 = 2ax$ в формулу (1), получим

$$Cax = gx \sin \alpha \Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha}{C}. \quad (3)$$

1.2 Формула для определения коэффициента C имеет вид

$$C = \frac{g \sin \alpha}{a}. \quad (4)$$

Примечание. Формула для ускорения можно получить, если взять производную по времени от уравнения (1):

$$\left(C \frac{mv^2}{2} - C \frac{mv_0^2}{2} \right)' = (mgx \sin \alpha)' \Rightarrow C \frac{m}{2} 2vv' = mg \sin \alpha \cdot x' \Rightarrow \{x' = v, \quad v' = a\} \Rightarrow$$

$$Ca = g \sin \alpha$$

Часть 2. Качение трубки и цилиндра.

2.1 В наших экспериментах использовалась доска длиной $L = 800$ мм, один конец которой был приподнят на высоту $h = 12$ мм. Таким образом угол наклона (в радианах) равен

$$\alpha = \frac{h}{L} = \frac{12}{800} = 0,015. \quad (5)$$

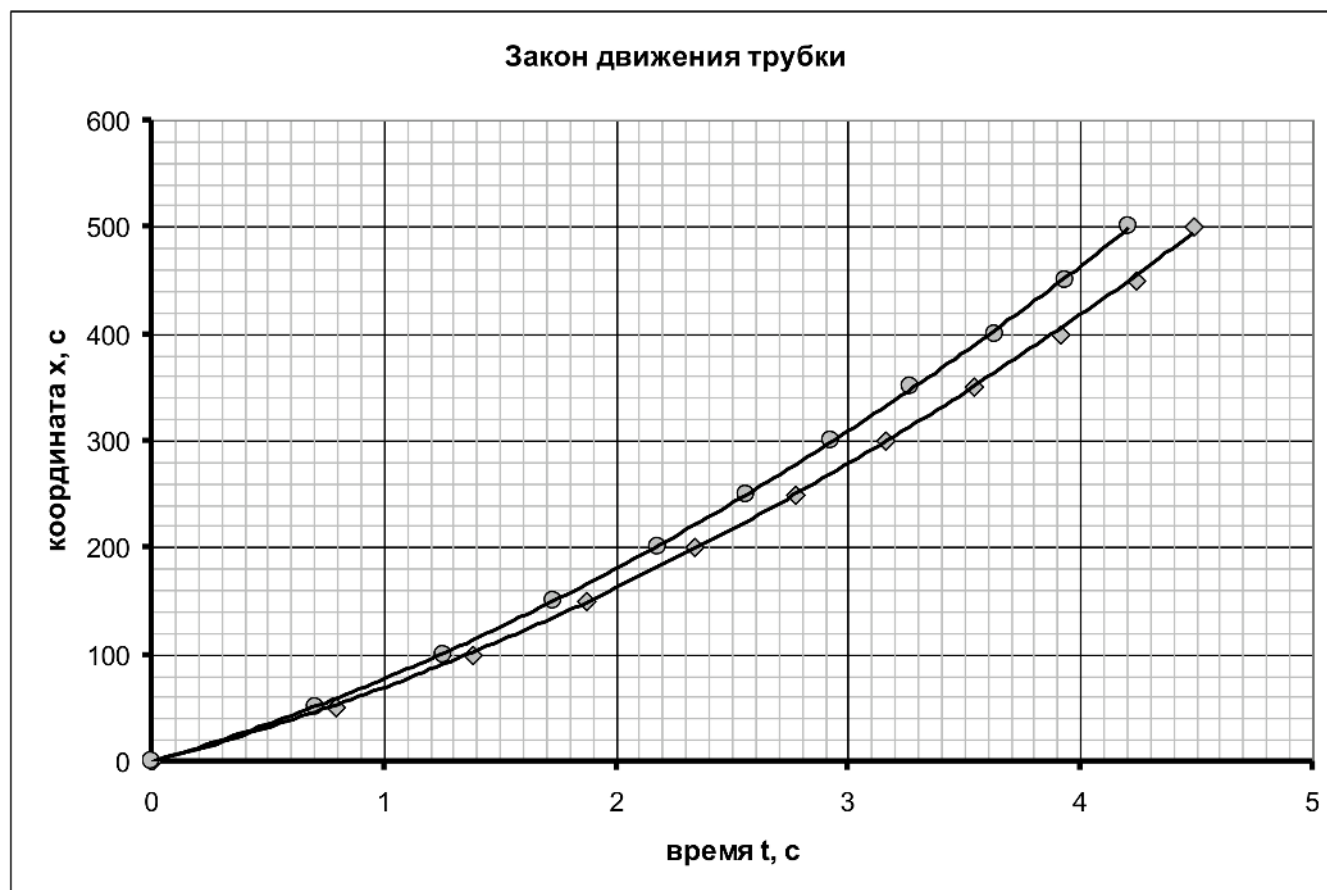
Этот угол мал, поэтому даже в пределах погрешностей измерения можно считать, что $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$.

В таблице 2 приведены результаты измерений времен прохождения участков пути длиной x . Измерение проведены дважды, поэтому все приведенные ниже графики – двойные. Для участников достаточно провести одну серию измерений.

Таблица 1. Результаты измерений для трубки

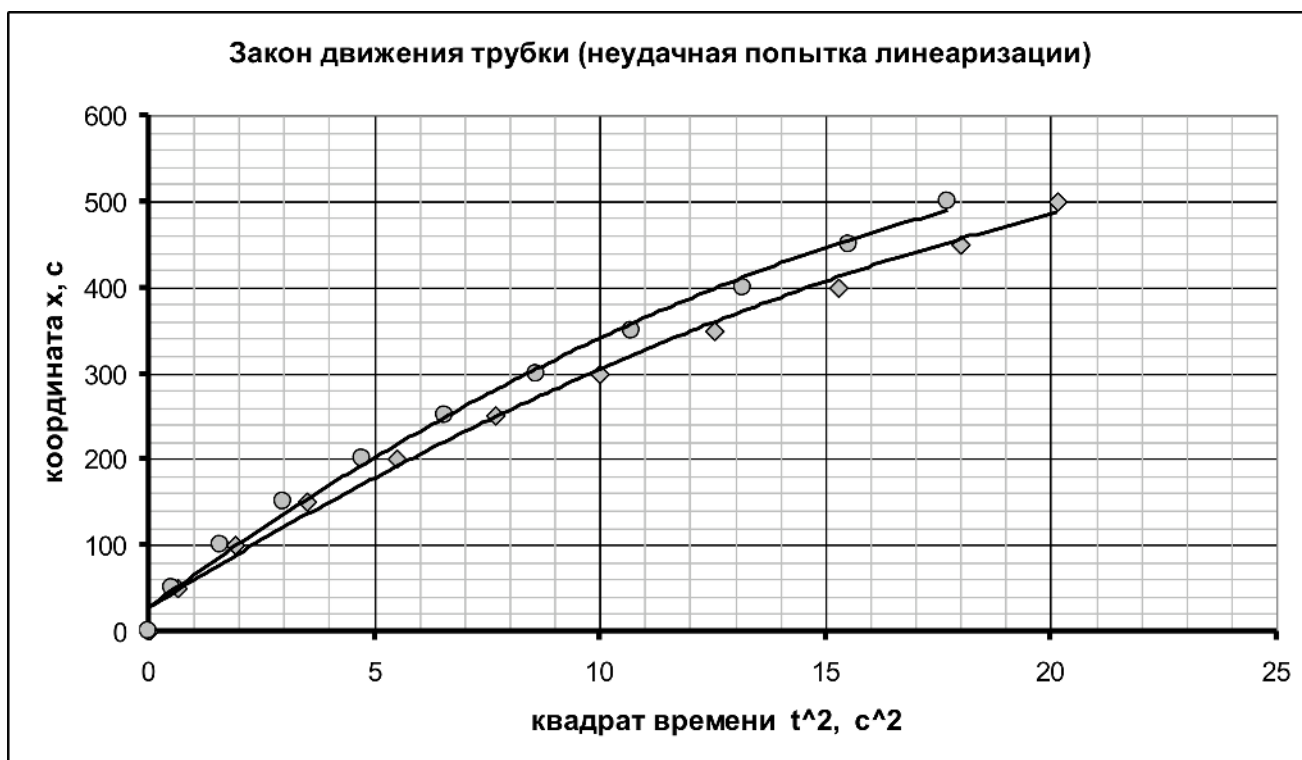
$x, \text{ мм}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$\frac{x}{t_1}, \frac{v}{\text{с}}$	$\frac{x}{t_2}, \frac{v}{\text{с}}$	$t_1^2, \text{ с}^2$	$t_2^2, \text{ с}^2$
0	0	0				
50	0,79	0,71	63,29	70,42	0,62	0,50
100	1,38	1,26	72,46	79,37	1,90	1,59
150	1,87	1,73	80,21	86,71	3,50	2,99
200	2,34	2,18	85,47	91,74	5,48	4,75
250	2,77	2,56	90,25	97,66	7,67	6,55
300	3,16	2,93	94,94	102,39	9,99	8,58
350	3,54	3,27	98,87	107,03	12,53	10,69
400	3,91	3,63	102,30	110,19	15,29	13,18
450	4,24	3,94	106,13	114,21	17,98	15,52
500	4,49	4,21	111,36	118,76	20,16	17,72

Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.



Внешне графики напоминают параболы, однако этого «внешнего впечатления» недостаточно, чтобы сделать вывод о том, что движение является равноускоренным!

Так же по графику видно, что в начальный момент времени скорость трубки не равна нулю. Поэтому линеаризация вида $x(t^2)$ в данном случае не подходит. Следующий (не нужный по условию график) подтверждает это утверждение.

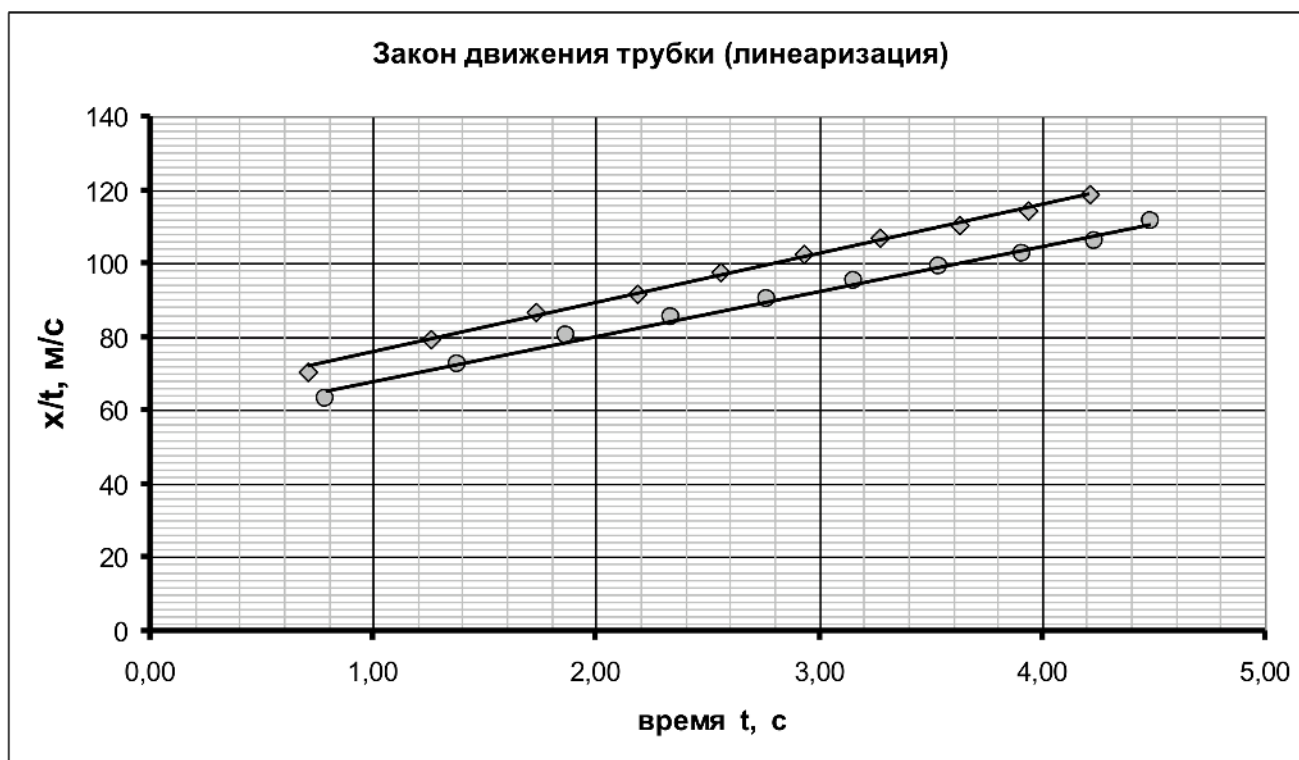


Так как начальная координата равна нулю, то функцию, описывающую равноускоренное движение

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (6)$$

следует приводить к линейному виду посредством преобразования

$$\frac{x}{t} = v_0 + \frac{at}{2} \quad (7)$$



Результаты расчетов этой зависимости также приведены в таблице 1. На рисунке показан график линеаризованной зависимости.

По наклону графика (коэффициент наклона $K = (13,4 \pm 0,54) \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$) определяем ускорение трубки

$$a = 2K = (26,8 \pm 1,1) \frac{\text{мм}}{\text{с}^2} = (2,68 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad (8)$$

Наконец, по формуле (4) рассчитываем значение коэффициента C

$$C = \frac{g \sin \alpha}{a} = \frac{9,8 \cdot 0,015}{2,68 \cdot 10^{-2}} \approx 5,5. \quad (9)$$

Основной вклад в погрешность вносит погрешность измерения ускорения, поэтому

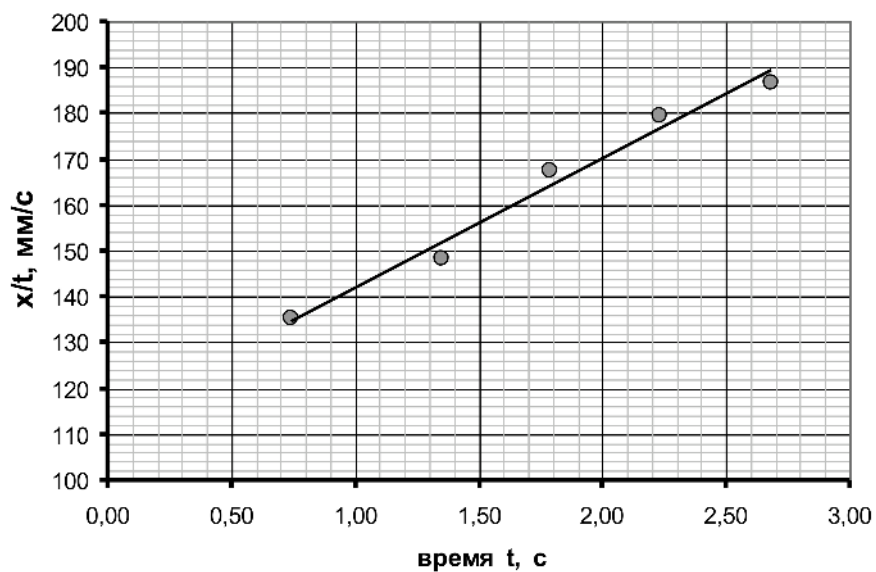
$$\Delta C = C \frac{\Delta a}{a} = 0,2. \quad (10)$$

Аналогично проводятся измерения характеристик движения цилиндра. Результаты измерений приведены в Таблице 2. Графики закона движения (непосредственный и линеаризованный) приведены на рисунках.

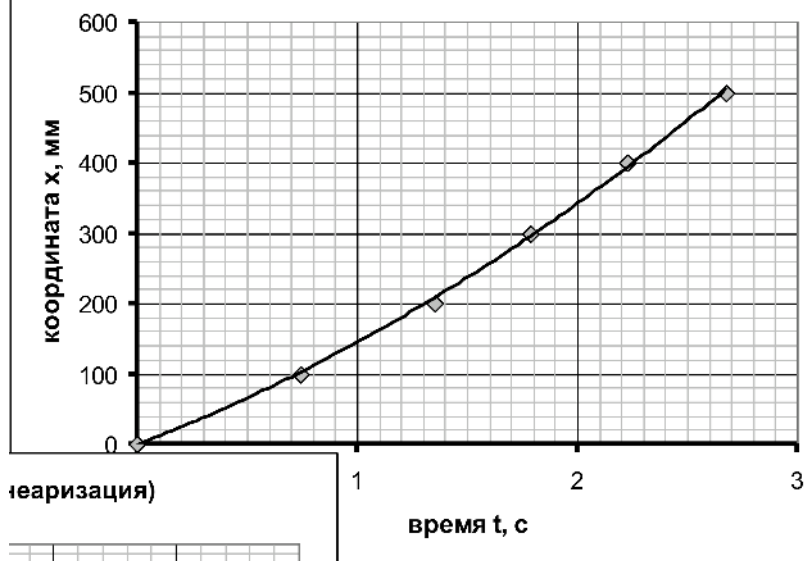
Таблица 2.

x , мм	t , с	$\frac{x}{t}$, $\frac{v}{c}$
0	0	
100	0,74	135,14
200	1,35	148,15
300	1,79	167,60
400	2,23	179,37
500	2,68	186,57

Закон движения цилиндра (линеаризация)



Закон движения цилиндра



По линеаризованной зависимости можно рассчитать требуемые численные значения параметров:

Значение коэффициента наклона графика $K = (28 \pm 5) \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$,

Значение ускорения $a = 2K = (56 \pm 10) \frac{\text{мм}}{\text{с}^2} = (5,6 \pm 1) \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Коэффициент $C = 2,6 \pm 0,4$

Часть 3. Зависимость ускорения от угла наклона.

3.1 Формула, позволяющая по двум измеренным временам прохождения двух отметок рассчитать ускорение тела, выводится путем цепочки алгебраических преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ x_2 = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{t_1} = v_0 + \frac{at_1}{2} \\ \frac{x_2}{t_2} = v_0 + \frac{at_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = \frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow$$

$$a = 2 \frac{\frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1}}{t_2 - t_1} \quad (11)$$

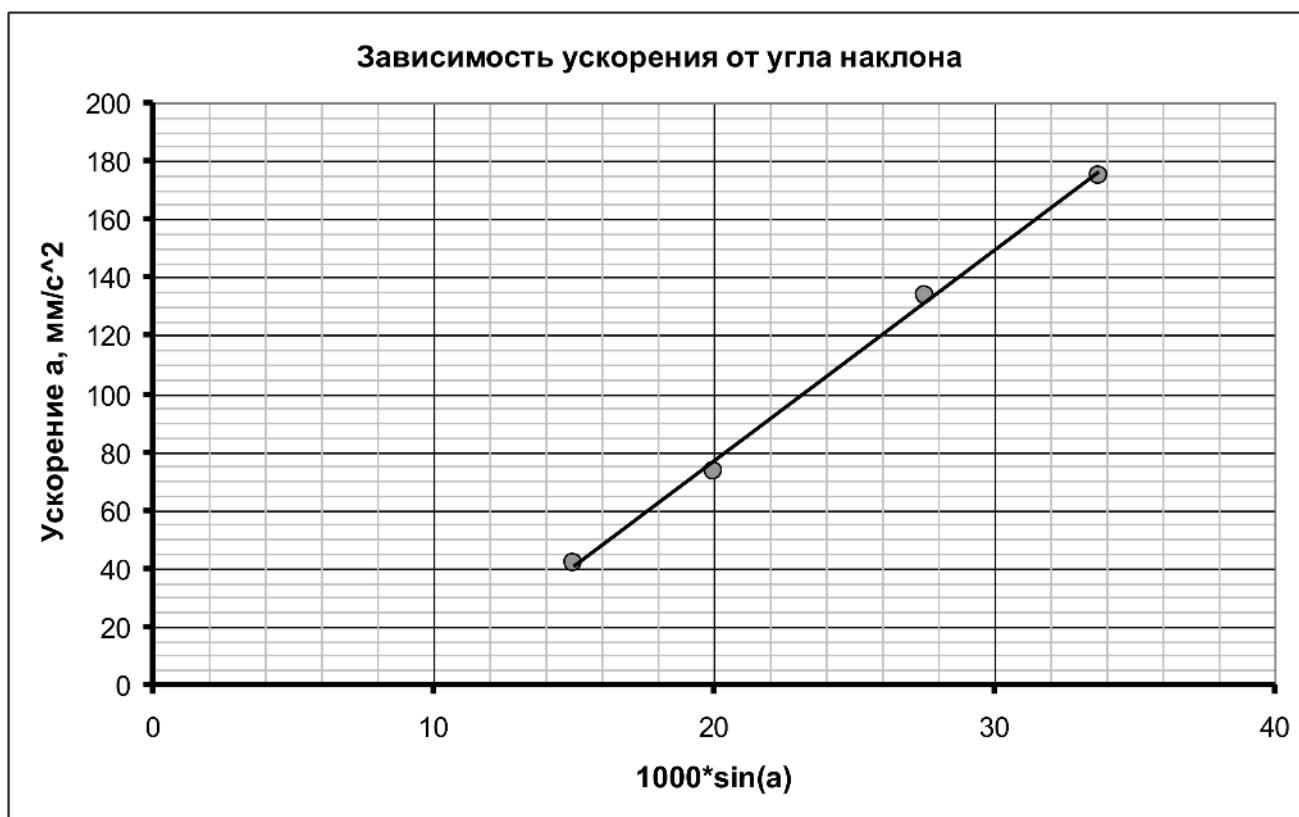
3.2 Для измерения зависимости ускорения от угла наклона на наклонной плоскости (общая длина 800 мм) были отмечены два равных участка. Координаты концов этих точек являлись $x_0 = 0$, $x_1 = 250$ мм, $x_2 = 500$ мм. Затем измерялись времена t_1, t_2 прохождения отметок x_1, x_2 , причем секундомер запускался, когда трубка проходила нулевую отметку. Для каждого угла наклона измерения проводились три раза, для каждого из них было рассчитано значение ускорения, после чего вычислялось среднее значение ускорения.

Результаты измерений и расчетов приведены в таблице 3. Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 3.

h , мм	$\alpha \cdot 10^3$	$x = 250$ мм t_1 , с	$x = 500$ мм t_2 , с	$a \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$	$\langle a \rangle \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$
12	15,00	3,31	4,75	41,30	41,50
		3,16	4,61	40,48	
		2,51	3,88	42,72	
16	20,00	2,17	3,25	71,55	73,42
		2,26	3,34	72,37	
		2,17	3,22	76,33	
22	27,50	1,72	2,51	136,34	133,91
		1,76	2,57	129,65	
		1,68	2,47	135,75	
27	33,75	1,45	2,12	189,36	175,13
		1,45	2,16	166,39	
		1,39	2,09	169,65	

График зависимости ускорения от угла наклона показан на рисунке.



Коэффициенты полученной линейной зависимости

$$a = K\alpha + b \quad (12)$$

Оказываются равными $K = 7,26 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$, $b = -68,6 \frac{\text{ММ}}{\text{с}^2}$

Наличие постоянного сдвига свидетельствует о заметном влиянии силы трения качения на движение цилиндра. Это частично объясняет явно завышенное значение коэффициентов C , полученных в предыдущей части.

Если в уравнение (1) добавить работу силы трения

$$C \frac{mv^2}{2} - C \frac{mv_0^2}{2} = mg\Delta h - \mu mg \cos \alpha, \quad (13)$$

То это приведет к появлению слагаемого, обусловленного трением, в выражении для ускорения:

$$Cax = gx \sin \alpha - \mu gx \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha}{C} \approx \frac{g}{C} \alpha - \frac{\mu g}{C} \quad (14)$$

Из сравнения теоретической зависимости (14) с экспериментальной зависимостью (12) следует, что значение коэффициента C по этим данным оказывается равным $C \approx 1,4$. Отметим, что теоретическое значение этого коэффициента для трубки $C_{\text{теор}} = 2$.

Существенные отклонения полученного результата может быть объяснено частичным проскальзыванием трубки при скатывании, что может быть особенно существенным, если трубка не совсем круглая и немного «подпрыгивает» при движении.

Следует подчеркнуть, что при движении с постоянным проскальзыванием коэффициент K в формуле (12) должен быть равен ускорению свободного падения (независимо от C)!