

-3. Обогрев дома

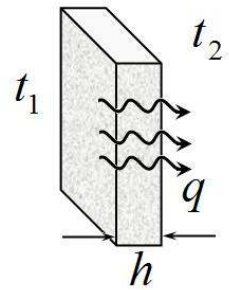
Условие

Задача 9-3. Обогрев дома.

Республика Беларусь тратит значительно количество энергии на обогрев помещений. Экономия ресурсов, затрачиваемых на отопление, является важной государственной проблемой. В данной задаче Вам необходимо рассмотреть некоторые возможности уменьшения расходов на поддержание комфортных температур в жилых помещениях.

При решении задачи вам понадобится закон теплопроводности (сформулированный французским физиком Ш. Фурье). В упрощенной форме он формулируется следующим образом. Пусть одна сторона плоскопараллельной пластины толщиной h поддерживается при постоянной температуре t_1 , а вторая при температуре t_2 . Тогда плотность потока теплоты q через пластину пропорционален разности температур и обратно пропорционален толщине пластины

$$q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{h}, \quad (1)$$



Коэффициент пропорциональности зависит только от материала пластины и называется **теплопроводностью** материала.

Плотностью потока теплоты называется количество теплоты, которое перетекает через площадку единичной площади в единицу времени (чтобы избежать путаницы в данной задаче температуру будем обозначать t , а время τ)

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta \tau} \quad (2)$$

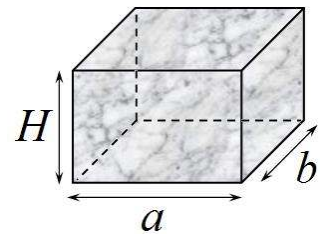
Справочные данные:

	Плотность	Удельная теплоемкость	Теплопроводность
Воздух	$\rho_0 = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_0 = 1,0 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\lambda_0 = 2,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Бетон	$\rho_1 = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_1 = 0,92 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\lambda_1 = 1,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Утеплитель (стекловата)			$\lambda_2 = 6,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$

Примечание. Плотность, теплоемкость и теплопроводность воздуха зависят от температуры и давления. Однако, в данной задаче этими зависимостями следует пренебречь и использовать приведенные в таблице средние значения.

Часть 1. Бетонная коробка.

Основу дома является бетонная коробка, внутренние размеры которой $a \times b \times H = 6,0 \times 6,0 \times 2,5$ м. Толщина стен, пола и потолка равна $h = 20$ см.



1.1 Рассчитайте массу бетона, из которого изготовлена коробка. 1.2 Рассчитайте теплоемкость коробки C_1 . 1.3 Оцените массу воздуха внутри дома и его теплоемкость C_0 .

Теплоемкостью тела C (не путайте с удельной теплоемкостью вещества) называется количество теплоты, которое требуется, чтобы нагреть тело на 1° .

Влиянием окон и дверей на потери теплоты можно пренебречь. Пол и потолок дома хорошо теплоизолированы (потолок поверх слоя бетона, а пол снизу слоя бетона), поэтому потери теплоты проходят только через стены дома.

Часть 2. Обогрев без утеплителя

В данной части задачи рассматриваются возможности обогрева рассмотренного в Части 1. Для обогрева дома используется печь, работающая на дизельном топливе. Коэффициент полезного действия печи приемлем равным 70% (т.е. 30% выделяемой теплоты улетает «в трубу»). Максимальная полезная мощность печи равна $P_0 = 10$ кВт.

2.1 Рассчитайте стоимость ($s_0 \frac{\text{руб}}{\text{Дж}}$) 1 Джоуля теплоты, идущего на нагревание дома.

Плотность дизельного топлива $\rho = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, удельная теплота его сгорания $q = 43 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$, цена 1 литра топлива 1,2 руб.

2.2 Пусть мощность теплоты идущей на обогрев комнаты равна P , температура наружного воздуха t_0 . Получите формулу для установившейся температуры воздуха внутри дома t_1 .

**Считайте, что температура поверхности стен внутри дома равна t_1 , а снаружи - t_0 . Для передачи теплоты от стен к наружному воздуху температура стены должна быть немного выше, чем температура воздуха. Однако эта разность обычно мала и ею можно пренебречь.*

2.3 Пусть средняя температура наружного воздуха равна $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Какова должна быть мощность теплоты P_1 , идущей на обогрев, что бы температура воздуха внутри дома была равна $t_1 = 20^\circ\text{C}$? Рассчитайте стоимость дизельного топлива, которое потребуется на обогрев дома в течение суток.

2.4 Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$. Печь разжигают. Рассчитайте: - количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате до температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$; - количество теплоты, которое пойдет на нагревание стен, потолка и пола до достижения установившейся температуры; - стоимость «разогрева» дома в рублях. Оцените время разогрева дома до установившейся температуры. Если мощность печи равна максимальной полезной мощности печи $P_0 = 10$ кВт.

Часть 3. Утепление

Пусть теплота перетекает через некоторый слой вещества. На основании закона Фурье можно

записать, что плотность потока теплоты через слой выражается формулой

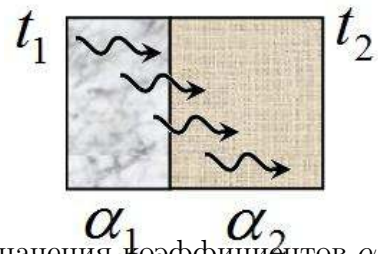
$$q = \alpha \Delta t, \quad (3)$$

где коэффициент α (назовем ее тепловой проводимостью) зависит от материала слоя и его толщины, Δt - разность температур на границах слоя.

3.1 Рассчитайте численное значение коэффициента α для бетонной стены рассматриваемого дома.

3.2 Путь теплота протекает через два параллельных слоя, теплопроводности которых равны α_1 и α_2 . Покажите, что плотность потока теплоты через составной слой может быть записана в виде

$$q = \alpha(t_1 - t_2) \quad (4)$$



Выразите значение коэффициента α для составного слоя, через значения коэффициентов α_1 и α_2 .

Для уменьшения расходов стены дома утепляют, покрывая их слоем утеплителя (стекловаты), толщиной $h_2 = 10$ см.

3.3 Какова должна быть мощность теплоты P_2 , идущей на обогрев дома, чтобы поддерживать внутри постоянную температуру $t_1 = 20^\circ\text{C}$ при температуре наружного воздуха $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$.

3.4 Во сколько раз уменьшаться финансовые расходы на поддержание температуры в доме.

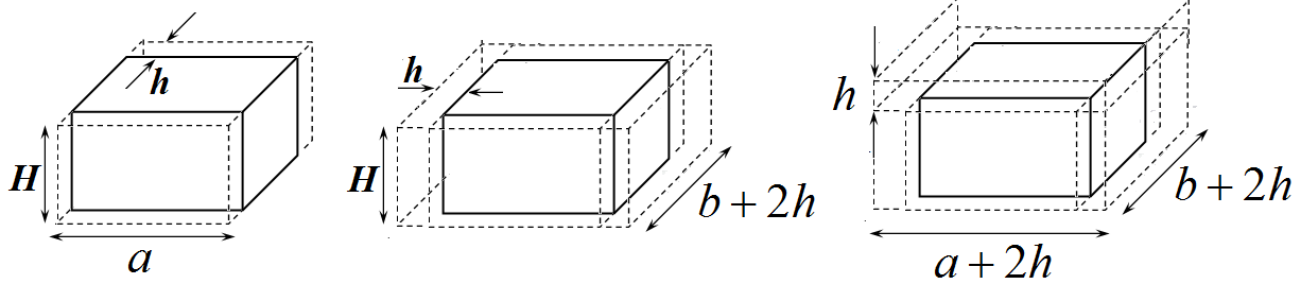
3.5 Оцените время и стоимость «разогрева» утепленного дома от $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$ до установившейся температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$, если включить печь на максимальную полезную мощность $P_0 = 10$ кВт.

3.6 Допустим, что житель города наезжает в свой загородный дом (рассматриваемый в данной задаче) только на выходные дни. Дайте совет — что экономически выгоднее, разогревать дом по приезду в субботу, или поддерживать его установившуюся температуру в течение будних дней?

Решение

Задача 9-3. Обогрев дома.

1.1 – 1.2 Рассчитаем объем бетона (с правильным учетом углов дома):



Две стены:

$$V_1 = 2aHh;$$

Еще две стены:

$$V_2 = 2(b+2h)Hh;$$

Потолок и пол:

$$V_3 = 2(a+2h)(b+2h)h.$$

Подстановка численных значений и вычисления приводят к следующему результату (округление проведено с одной запасной цифрой)

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 28,8 \text{ м}^3.$$

Масса бетона

$$m_1 = \rho_1 V = 6,3 \cdot 10^4 \text{ кг} \quad (1)$$

Его теплоемкость

$$C_1 = c_1 m_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (2)$$

2.4 -1.4 Масса воздуха и его теплоемкость рассчитывается по формулам

$$m_0 = abH\rho_0 = 108 \text{ кг} \quad (3)$$

$$C_0 = c_0 m_0 = 108 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (4)$$

2.4 При сгорании 1 литра дизельного топлива выделяется количество теплоты

$$Q_0 = \rho V q = 860 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 43 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Из этого количества на обогрев дома пойдет

$$Q_1 = \eta Q_0 = 2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Стоимость этой теплоты равна 1,2 рубля, следовательно, стоимость одного джоуля теплоты равна

$$s_0 = \frac{1,2 \text{ руб}}{2,6 \cdot 10^7 \text{ Дж}} = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}}. \quad (5)$$

Т.е. приближенно 5 микрокопеек.

2.4 В установившемся режиме, количество теплоты, поступающей от нагревателя равно, количеству теплоты, уходящей через стены, поэтому

$$P = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0). \quad (5)$$

Где $S = 4aH$ - площадь стен. Из этого соотношения следует

$$t_1 = t_0 + \frac{h}{4aH\lambda_1} P. \quad (5)$$

2.3 Используя формулу (4), найдем

$$P_0 = \lambda_1 \frac{t_1 - t_0}{h} S = \frac{4aH}{h} \lambda_1 (t_1 - t_0) = 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 7,2 \text{ кВт}. \quad (6)$$

Стоимость требуемого в течение суток топлива равна руб $S = s P \tau = 6,4 \cdot 10^{-8} \cdot 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot (24 \cdot 3600) \text{ с} = 29 \text{ руб}.$
(7) 00 Дж

$$S = s_0 P_0 \tau = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} \cdot 7,2 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot (24 \cdot 3600) \text{ с} = 29 \text{ руб}. \quad (7)$$

2.4 Рассмотрим разогрев дома. Пусть начальная температура воздуха в доме и температура стен равна температуре наружного воздуха $t_0 = 0,0^\circ \text{C}$. Печь разжигают.

Количество теплоты, которое пойдет на разогрев воздуха в комнате, равно

$$Q_0 = C_0(t_1 - t_0) = 108 \cdot 20 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \quad (8)$$

Для расчета количества теплоты, которое пойдет на нагревание стен до достижения установившейся температуры, следует учесть, что температура внутри стен линейно изменяется от $t_1 = 20^\circ \text{C}$ до $t_0 = 0,0^\circ \text{C}$. Поэтому на разогрев стен потребуется количество теплоты равное

$$Q_{\text{ст}} = 4aHh\rho_1 c_1 \frac{t_1}{2} = 4 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 10 = 2,4 \cdot 10^8 \Delta\kappa.$$

Потолок и пол должны полностью нагреться до температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Требуемое на это количество теплоты равно

$$Q_{n-n} = 2a^2 h \rho_1 c_1 t_1 = 2 \cdot 6,0^2 \cdot 0,20 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \cdot 0,92 \cdot 10^3 \cdot 20 = 5,8 \cdot 10^8 \Delta\kappa$$

Полное количество теплоты, которое потребуется на разогрев всего дома

$$Q_1 = 8,2 \cdot 10^8 \Delta\kappa. \quad (9)$$

Стоимость этой теплоты руб $S = cQ = 6,4 \cdot 10^8 \cdot 2,8 \cdot 10^8 \text{Дж} = 38 \text{руб.}$ (10) 01 Дж

$$S = c_0 Q_1 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\Delta\kappa} \cdot 8,2 \cdot 10^8 \Delta\kappa = 38 \text{руб}. \quad (10)$$

Время разогрева можно оценить по формуле Дж $\tau = 1 = 2,8 \cdot 10^4 \text{с} = 23 \text{часа.}$ (11) Р·З 1010Вт 0 Вт

$$\tau = \frac{Q_1}{P_0} = \frac{8,2 \cdot 10^8 \Delta\kappa}{10 \cdot 10^3 \text{Вт}} = 8,2 \cdot 10^4 \text{с} = 23 \text{ часа}. \quad (11)$$

3.1 Сравнивая формулы (1) и (3), находим, что $\lambda_1 = 1,2 \frac{Bm}{M \cdot K}$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{1,2 \frac{Bm}{M \cdot K}}{0,20M} = 6,0 \frac{Bm}{M^2 \cdot K}. \quad (12)$$

3.2 Обозначим температуру стыка слоев t_x . Тогда плотности потоков теплоты через разные слои описываются формулами

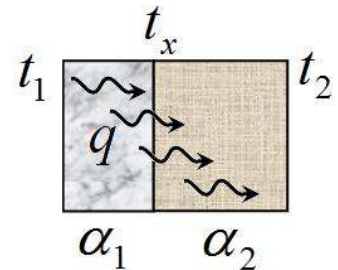
$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1(t_1 - t_x) \\ q_2 &= \alpha_2(t_x - t_2) \end{aligned} \quad (13)$$

В установившемся режиме $q_1 = q_2$. Из этого условия находим температуру места соединения слоев

$$\alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_2(t_x - t_2) \Rightarrow t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Плотность потока теплоты можно выразить через температуры границ составного слоя, как

$$q = q_2 = q_1 = \alpha_1(t_1 - t_x) = \alpha_1 \left(t_1 - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (t_1 - t_2).$$



Тем самым доказана формула (4) условия задачи. Видно, что проводимость составного слоя равна¹

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

3.3 -3.4 Рассчитаем тепловую проводимость слоя изоляции Вт $0,6 \cdot 10^2 \lambda_{\text{м}} \cdot \text{КВт}$ $\alpha = 2 = \dots - 1$ $0,610$. (17) $22 \text{ h}, 010 \text{ мм} \cdot \text{К}$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{h_2} = \frac{6,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}}{0,10 \text{ м}} = 6,0 \cdot 10^{-1} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

Тепловая проводимость стены с изоляцией в соответствии с формулой (16) оказывается равной ВтВт $\alpha = 12 = \dots, 055$. (18) $\alpha + \alpha 6,6 \text{ м}^2 \cdot \text{К м}^2 \cdot \text{К}$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 0,60}{6,6} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = 0,55 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

В этом случае условие стационарности температуры будет иметь вид

$$P = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0).$$

Подставляя численные значения, находим требуемую тепловую мощность

$$P_1 = 2aH \cdot \alpha(t_1 - t_0) = 2 \cdot 6,0 \cdot 2,5 \cdot 0,55 \cdot 20 = 660 \text{ Вт},$$

Что в $\frac{P_0}{P_1} = \frac{7200}{660} = 11$ раз меньше, чем мощность обогрева дома без утеплителя.

3.5 По формуле (14) рассчитаем температуру внешней стороны бетонной стенки

$$t_x = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{6,0 \cdot 20}{6,6} = 18^\circ.$$

Фактически всю бетонную коробку необходимо нагреть на 20° . Поэтому количество теплоты, требуемое на это равно

Следовательно, на нагревание стен требуется количество теплоты, равное

$$Q_2 = C_1 t_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\Delta x}{\text{К}} \cdot 20 \text{ К} = 11,6 \cdot 10^8 \Delta x,$$

Стоимость этой теплоты $S_2 = c_0 Q_2 = 4,6 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\Delta x} \cdot 1 \cdot 10^8 \Delta x = 53 \text{ руб}$, что больше, чем при нагреве стен без утеплителя.

Время разогрева утепленного дома

$$\tau_2 \approx \frac{Q_2}{P_0} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ с} = 32 \text{ часа}.$$

¹ Не сложно доказать, что в общем случае произвольного числа слоев

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$$

3.6 На поддержание комнатной температуры утепленного дома в течение суток требуется количество теплоты $Q = P_1\tau = 660 \cdot 24 \cdot 3600 = 5,7 \cdot 10^7$ Дж, стоимость которой $S = 2,6$ руб. Следовательно на поддержание постоянной температуры в течение 7 дней надо затратить 18 руб, что значительно меньше чем стоимость разогрева. Следовательно, поддерживать постоянную температуру выгоднее, чем каждую субботу разогревать дом, тем более, что в этом случае не придется сидеть в холодном доме всю субботу!