

-2. Велокомпьютер

Условие

Задача 9-2. Велокомпьютер



изме-
дали
скор
 v_{max}
Пред
стор
($S =$

Современный велокомпьютер позволяет в процессе движения измерять практически все кинематические параметры велосипедиста: дальность поездки S , её время t , мгновенную скорость $v(t)$ и среднюю скорость v_{cp} за все время движения, максимальную мгновенную скорость v_{max} за всю прогулку, полный пробег вашего велосипеда и т.д. Предположим, что велосипедист начал движение по прямому шоссе (в одну сторону), предварительно сбросив показания счетчика дальности на нуль ($S = 0,0$ км).

Часть 1. «Эволюция» средней скорости

скорость $v_{cp}(t + \Delta t)$
 $\Delta v_{cp} = v_{cp}(t + \Delta t) - v_{cp}(t)$
 Δt ($\Delta t \ll t$) изменение Δv_{cp}

2.4 Вычислите v_{max} , $S = 1,0$ км, $a = 0,50$ м/с²

1.1 Пусть за время t велосипедист проехал расстояние S , тогда его средняя скорость равна $v_{cp}(t) = S/t$. Затем за промежуток времени Δt он проехал расстояние ΔS . Чему равна средняя скорость $v_{cp}(t + \Delta t)$ велосипедиста за время $t + \Delta t$? Найдите изменение $\Delta v_{cp} = v_{cp}(t + \Delta t) - v_{cp}(t)$ средней скорости велосипедиста за промежуток времени Δt . При малом Δt ($\Delta t \ll t$) изменение Δv_{cp} средней скорости можно представить в виде $\Delta v_{cp} = A \cdot \Delta S + B \cdot \Delta t$. Установите размерности полученных коэффициентов A и B и найдите их явные выражения через величины S и t .

1.2 Рассчитайте Δv_{cp} для значений $S = 15$ км, $\Delta S = 0,10$ км, $t = 30$ мин, $\Delta t = 30$ с.

1.3 Получите соотношение между величинами $S, t, \Delta S$ и Δt , при котором значение средней скорости v_{cp} не изменится после прохождения велосипедистом малого участка дистанции ΔS .

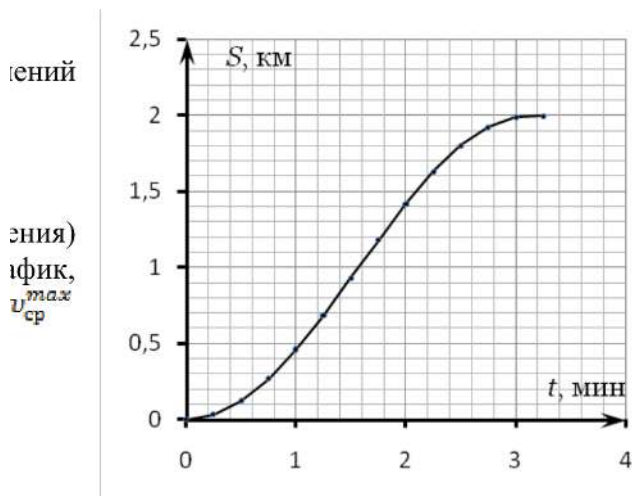
Часть 2. «Странная» гонка

Рассмотрим движение велосипедиста, при котором он половину пути ($S/2$) разгонялся с некоторым постоянным ускорением a , а затем половину пути ($S/2$) тормозил с таким же по модулю ускорением.

2.1 Найдите зависимость скорости $v(t)$ велосипедиста от времени и на выданном бланке постройте график полученной зависимости. Определите максимальное значение скорости v_{max} велосипедиста при таком движении и расстояние S_1 от места старта, на котором оно будет зафиксировано велокомпьютером.

2.2 Найдите зависимость средней скорости $v_{cp}(t)$ велосипедиста от времени и на этом же бланке постройте график полученной зависимости.

2.3 Найдите максимальное значение v_{cp}^{max} средней скорости велосипедиста при таком движении, а также расстояние S_2 от места старта, на котором оно будет зафиксировано велокомпьютером.



2.4 Вычислите v_{max} ,

$S = 1,0$ км, $a = 0,50$ м/с²

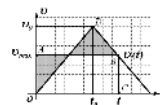
2.4 Вычислите v_{max} , S_1 , v_{cp}^{max} , S_2 для значений $S = 1,0$ км, $a = 0,50$ м/с².

Часть 3. Произвольный закон движения

3.1 Зависимость $S(t)$ пути от времени (закон движения) велосипедиста представлен на графике. Используя график, найдите максимальную среднюю скорость v_{cp}^{max}

велосипедиста на всей дистанции и расстояние S_3 , на котором она была зафиксирована велокомпьютером.

Примечание: при малых x ($x \rightarrow 0$) справедливо равенство $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.



Решение

Задача 9-2. Велокомпьютер

Часть 1. «Эволюция» средней скорости

1.1 Согласно определению средней скорости можем записать

$$\frac{S}{t + \Delta t} = \frac{S}{t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)} \approx \frac{S}{t} \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) = \frac{S}{t} - \frac{S \Delta t}{t^2}, \quad (1)$$

Далее учтём условие малости промежутков $\Delta S \ll S$ и $\Delta t \ll t$ и примечание в условии задачи

$$\frac{S}{t + \Delta t} = \frac{S}{t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)} \approx \frac{S}{t} \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) = \frac{S}{t} - \frac{S \Delta t}{t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta S}{t + \Delta t} \approx \frac{\Delta S}{t}. \quad (3)$$

$$\frac{S}{t + \Delta t} = \frac{S}{t \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)} \approx \frac{S}{t} \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) = \frac{S}{t} - \frac{S \Delta t}{t^2}$$
$$\frac{\Delta S}{t + \Delta t} \approx \frac{\Delta S}{t}.$$

С учётом последних равенств (1) можно переписать в виде

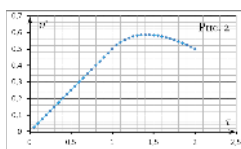
$$\frac{S}{t + \Delta t} = \frac{S}{t} - \frac{S \Delta t}{t^2} + \frac{\Delta S}{t}. \quad (4)$$

Как следует из (4), изменение (приращение) средней скорости велосипедиста можно записать как

$$\Delta \left(\frac{S}{t} \right) = - \frac{S \Delta t}{t^2} + \frac{\Delta S}{t}. \quad (5)$$

Из (5) находим искомые выражения для коэффициентов A и B

$$A = \frac{1}{t}, B = -\frac{S}{t^2}. \quad (6)$$



Используя (6) найдём размерности полученных коэффициентов

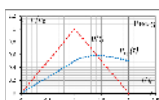
$$\cdot \quad (7)$$

1.2 Расчёт даёт отрицательное значение для изменения средней скорости велосипедиста на рассматриваемом малом участке дистанции (т.е. его средняя скорость при этом уменьшается)

$$\cdot \quad (8)$$

1.3 Если значение средней скорости велосипедиста на некотором малом участке дистанции постоянно, то понятно, что его изменение (приращение) равно нулю. Тогда, согласно (5), имеем

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{t}. \quad (9)$$



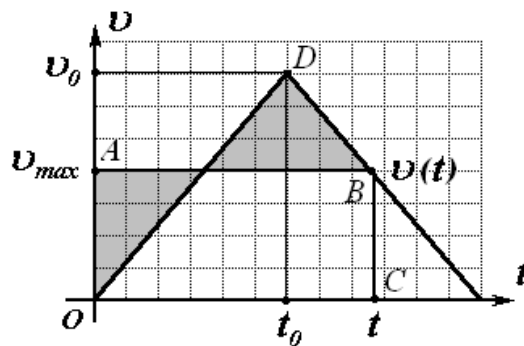
Условие (9) можно сформулировать следующим образом: если средняя скорость (S/t) движения велосипедиста на данном малом участке дистанции не изменяется, то он «удачно» едет с мгновенной скоростью ($\frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t)$), равной средней. Соответственно, если мгновенная скорость $v(t)$ больше средней), то средняя скорость будет расти, а если $v(t)$ меньше средней ($\frac{\Delta S}{\Delta t} < \frac{S}{t}$) – то убывать.

Часть 2. «Странная» гонка

$$S_1 = 0,50 \text{ км}$$

$$t_0 = \sqrt{S/a} = 45 \text{ с}$$

2.1 Построим график зависимости мгновенной скорости $v(t)$ велосипедиста от времени в течение гонки (рис. 1). Поскольку ускорение движения велосипедиста постоянно, то его мгновенная скорость линейно возрастает на первой половине дистанции (времени), достигая максимального значения на середине дистанции $S_1 = 0,50$ км через промежуток времени $t_0 = \sqrt{S/a} = 45$ с, а далее – также линейно убывает. При этом, как следует из (9), даже на второй половине дистанции средняя скорость велосипедиста продолжает расти некоторое время t , несмотря на то, что мгновенная скорость уже убывает. Действительно, до тех пор, пока его мгновенная скорость $v(t)$ будет больше средней на всей дистанции приращение будет положительным.



2.2 На участке OD (см. рис. 1), где средняя скорость равна половине мгновенной скорости, поскольку движение велосипедиста является равноускоренным. Следовательно, здесь

$$\bar{v} = \frac{v}{2}, \quad (10)$$

т.е. искомая зависимость представляет собой прямую, выходящую из начала координат.

Далее ($t_0 < t < 2t_0$) мгновенная скорость начинает убывать, поэтому для нахождения средней скорости необходимо найти весь путь (площадь фигуры $ODBC$ на рис. 1) и разделить его на все время движения велосипедиста. При этом получим зависимость

$$\bar{v}(t) = \frac{S(t)}{t}. \quad (11)$$

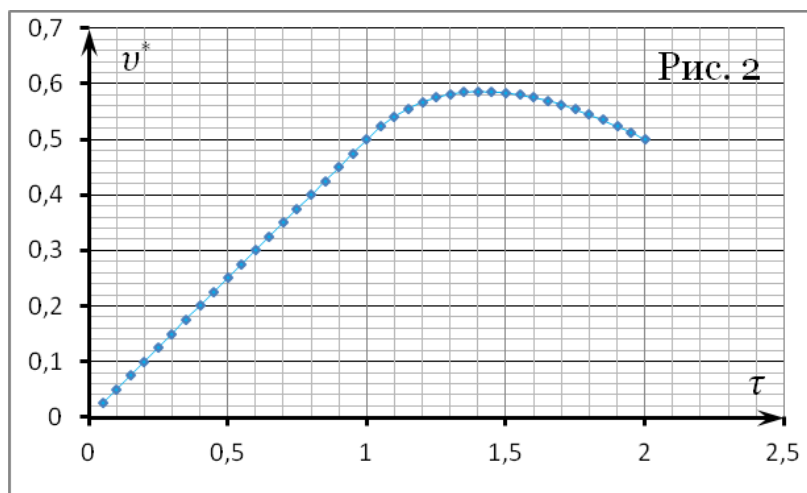


График полученной зависимости (11) для $v^* = \frac{v}{v_0}$ и $\tau = \frac{t}{t_0}$ приведен на рисунке 2 (построение этого графика на отдельном бланке от школьников не требуется).

На участке от нуля до единицы график линейно растет до значения 0,5, затем испытывает максимум и к концу дистанции, вновь приходит к значению 0,5, поскольку велосипедист на всех этапах двигался только равноускоренно.

Из графика также следует, что средняя скорость велосипедиста достигает максимума где-то на второй половине дистанции в окрестности точки $\tau \approx 1,4$.

2.3 Если некоторая функция в данной точке испытывает максимум (или минимум), то в окрестностях этой точки её приращение (изменение) равно нулю. Это легко понять,

проходящая по вершине холма: при этом наша высота будет оставаться практически неизменной.

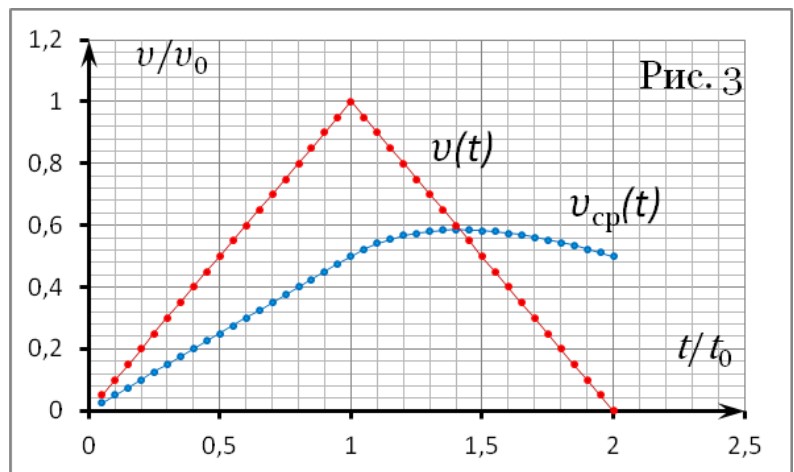
Но если вблизи максимума функции её приращение равно нулю, то выполняется условие (9). Следовательно, в момент, когда средняя скорость велосипедиста достигает своего максимального значения, справедливо равенство

$$(12)$$

Иными словами, искомая максимальная средняя скорость велосипедиста должна быть равна его мгновенной скорости $v(t)$.

$v(t)$
функции $v(t)$

Это значит, что график функции $v(t)$ пересекает график функции «сверху вниз» строго в точке её максимума, что и должно получиться при правильном построении двух графиков в одной системе координат (рис. 3).



Пусть это произошло через промежуток времени t после достижения максимума мгновенной скорости велосипедиста (см. Рис. 1).

Поскольку велосипедист уже начал замедляться, то его скорость в этот момент будет равна

$$v(t) = v_0 - at.$$

Соответственно, условие (12) можно переписать в виде

$$v(t) = v_0 - at = \frac{\frac{S}{2} + \frac{v_0 + (v_0 - at)}{2}t}{t_0 + t} = v_{\max} \quad (13)$$

$$v(t) = v_0 - at = \frac{\frac{S}{2} + \frac{v_0 + (v_0 - at)}{2}t}{t_0 + t} = v_{\max}$$

кватное уравнение относительно t

$$at^2 + 2v_0t - S = 0,$$

Поскольку промежуток времени t

Из (13) получаем квадратное уравнение относительно t

$$at^2 + 2v_0t - S = 0, \quad (14)$$

которое имеет два корня. Поскольку промежуток времени t движения велосипедиста положителен, то отрицательный корень уравнения следует отбросить как не имеющий физического смысла.

для t

$$t = \sqrt{\frac{S}{a}}(\sqrt{2} - 1) = 0,41t_0$$

для t в (13), находим $v_{\max}$

Выбираем положительный корень для t

$$t = \sqrt{\frac{S}{a}}(\sqrt{2} - 1) = 0,41t_0. \quad (15)$$

Подставляя полученное значение для t в (13), находим максимальное значение средней скорости велосипедиста

$$v_{\max} = \frac{v_0 + (v_0 - at)}{2} = \frac{v_0 + (v_0 - a \cdot 0,41t_0)}{2} = \frac{v_0 + (v_0 - \frac{S}{2t_0})}{2} = \frac{2v_0 - \frac{S}{2t_0}}{2} = v_0 - \frac{S}{4t_0} \quad (16)$$

и расстояние от места старта, на котором оно будет зафиксировано велокомпьютером

$$S = v_{\max} \cdot t = \left(v_0 - \frac{S}{4t_0}\right) \cdot 0,41t_0 = 0,41v_0t_0 - \frac{S}{4} \quad (17)$$

2.4 Расчёт даёт значения

$$v_{\max} = 10,8 \text{ м/с} = 38,9 \text{ км/ч} \quad (18)$$

$$S_2 = 2(\sqrt{2} - 1)S = 8,3 \cdot 10^2 \text{ м} = 0,83 \text{ км} \quad (19)$$

$$v(t) = v_0 - at = \frac{\frac{S}{2} + \frac{v_0 + (v_0 - at)t}{2}}{t_0 + t} = v_{\max} \quad \square$$

ратное уравнение относительно t

$$at^2 + 2v_0t - S = 0,$$

1. Поскольку промежуток времени t

Интересно, что уравнение (14) можно получить и более простым путем, если заметить, что выделенные на Рис.1 площади должны быть одинаковы, поскольку рассматриваемые фигуры $OABC$ и $ODBC$ равновелики. Тогда

$$\Rightarrow t^2 + 2t_0t - t_0^2 = 0. \quad (20)$$

$$S_2 = 2(\sqrt{2} - 1)S = 8,3 \cdot 10^2 \text{ м} = 0,83 \text{ км}$$

$$\begin{aligned} &\text{для } t \\ t &= \sqrt{\frac{S}{a}} (\sqrt{2} - 1) = 0,41t_0 \\ &\text{для } t \text{ в (13), находим м} \end{aligned}$$

С учётом того, что $t_0 = \sqrt{S/a}$ и $v_0 = \sqrt{aS}$, легко убеждаемся, что (20) совпадает с (14), т.е. для t получаем тот же ответ (15).

Подчеркнем, что любители дифференцировать могут также получить уравнение (14) достаточно «стандартным» путем, взяв производную от функции средней скорости (21) по времени t и приравняв её нулю. Используя правило дифференцирования частного функций, в результате для определения t получим уравнение

$$\frac{at^2}{2} + at_0t - \frac{S}{2} = 0, \quad (22)$$

которое опять же приводит нас к (14).

Как видим, все правильные способы решения, в отличие от неправильных, ведут к одному и тому же ответу.

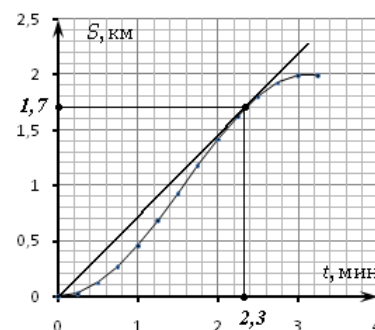
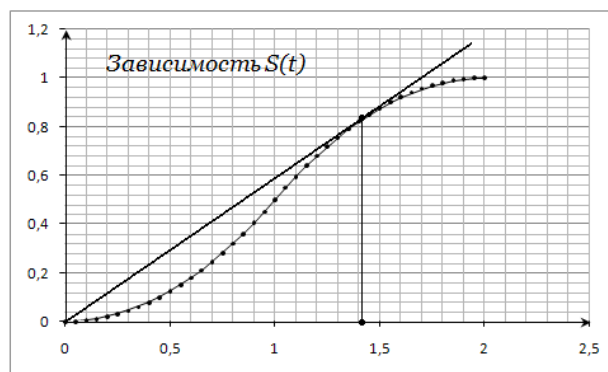
Часть 3. Произвольный закон движения

Заметим, что условие (9) равенства средней и мгновенной скоростей велосипедиста имеет наглядный графический смысл и в координатах $x(t)$. Действительно, для примера вернемся к части 2 задачи и построим график зависимости $S(t)$ пути велосипедиста от времени.

$$t_0 = \sqrt{\frac{S_0}{a}} \text{ и } v_0 = \sqrt{a S_0}$$

Для этого движения он будет представлять из себя две «сшитые» параболы с различными ориентациями ветвей. При этом мгновенная скорость велосипедиста $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t) = \tan \alpha$ равна угловому коэффициенту касательной в данной точке. Соответственно, средняя скорость равна угловому коэффициенту прямой, соединяющей данную точку с началом координат.

Равенство этих угловых коэффициентов в точке экстремума средней скорости означает, что касательная к графику должна проходить через начало координат. Построив такую касательную, из графика найдем приближенное значение $t \approx 1,4 t_0$, что неплохо согласуется с (15).



Используя такой же метод, найдем точку максимальной средней скорости для предложенного закона движения велосипедиста. Построим касательную к графику, проходящую через начало координат – в нашем случае она единственная и дает точку максимальной средней скорости велосипедиста на всей дистанции.

Построением (Рис. 3) находим, что искомые значения с учетом погрешностей равны

$$t_a = 2,3 \pm 0,1 \text{ мин} \quad (23)$$

$$S_a = 1,7 \pm 0,1 \text{ км.} \quad (24)$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t) = \tan \alpha$$

Следовательно, искомое значение . (25)