

-1. Еще одна колебательная система! Приборы и оборудование

Условие

Задание 11-1. Еще одна колебательная система!

Приборы и оборудование: штатив, спица вязальная (длинная), пластинка из жести; ластик, разрезанный на две равные части, секундомер, транспортер, линейка.

В данной работе Вам необходимо исследовать колебания маятника, изготовленного из обыкновенной спицы. Изогнутая по середине спица помещается на упор (в качестве которого используется пластинка, закрепленная в лапке штатива) Угол между спицами необходимо изменять и измерять! Измерения следует проводить для спицы и для спицы с одинаковыми грузами (кусочки ластика).

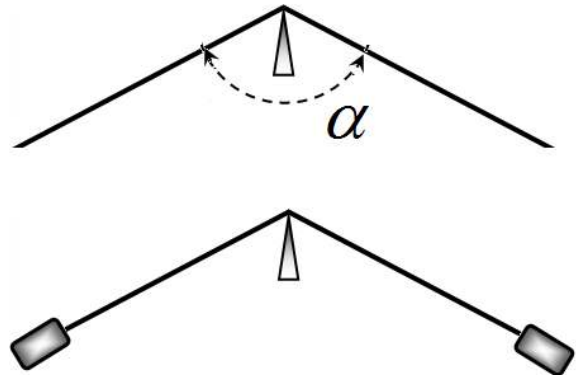
1. Выведите формулы для периодов колебаний спицы T_1 и спицы с грузами T_2 , если угол изгиба равен α .

Подсказка. Кинетическая энергия тонкого стержня, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов равна

$$E = \frac{1}{6}ml^2\omega^2, \quad (1)$$

где m - масса стержня, l - его длина.

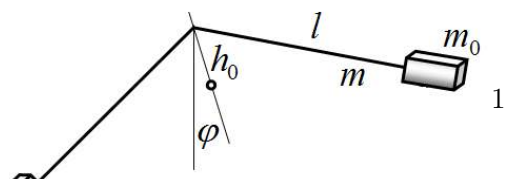
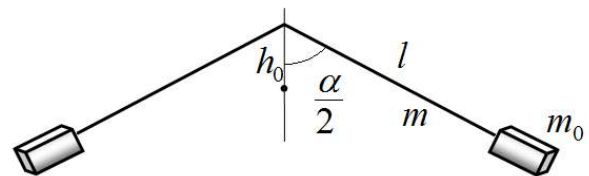
2. Измерьте зависимости периодов колебаний спицы и спицы с грузами от угла изгиба α .
3. Покажите, на основании результатов измерений, что выведенные вами формулы для периодов колебаний верны. Для этого линеаризуйте полученные зависимости и постройте графики линеаризованных зависимостей.
4. На основании результатов измерений, проведенных в п.2, рассчитайте отношение массы ластика к массе спицы. Оцените погрешность полученного результата.



Решение

1.1 Для расчета периодов колебаний сначала рассмотрим изогнутую спицу с прикрепленными грузами. Положение центра масс системы h_0 можно найти «по определению»

$$2(m+m_0)h_0 = 2m \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2m_0 l \cos \frac{\alpha}{2} = l \cos \frac{\alpha}{2} (m+2m_0) \quad (1)$$



При отклонении маятника на малый угол φ от вертикали изменение потенциальной энергии системы равно

$$\Delta U = Mg\Delta h = 2(m+m_0)gh_0(1-\cos \varphi) = (m+2m_0)l \cos \frac{\alpha}{2} g(1-\cos \varphi) \approx (m+2m_0)l \cos \frac{\alpha}{2} g \frac{\varphi^2}{2} \quad (2)$$

При выводе использована приближенная формула $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$.

Кинетическая энергия маятника при вращении с угловой скоростью $\omega = \varphi'$ равна

$$E_k = 2 \left(\frac{1}{6} ml^2 \omega^2 + \frac{m_0 l^2 \omega^2}{2} \right). \quad (3)$$

Запишем закон сохранения механической энергии при колебаниях маятника

$$2 \left(\frac{1}{6} ml^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 \right) \omega^2 + (m + 2m_0)l \cos \frac{\alpha}{2} g \frac{\varphi^2}{2} = E = const, \quad (4)$$

которое является уравнением гармонических колебаний. Круговая частота этих колебаний определяется отношением

$$\Omega^2 = \frac{(m + 2m_0)gl \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \left(\frac{1}{6} ml^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 \right)} = \frac{3g \cos \frac{\alpha}{2}}{2l} \cdot \frac{1 + 2\frac{m_0}{m}}{1 + 3\frac{m_0}{m}}. \quad (5)$$

Соответственно, периоды колебаний описываются формулами:

Без грузов ($m_0 = 0$)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g \cos \frac{\alpha}{2}}}. \quad (6)$$

С грузами

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 + 3\frac{m_0}{m}}{1 + 2\frac{m_0}{m}}}. \quad (7)$$

2-3 Полученные теоретические формулы для периодов колебаний показывают, что зависимость $\frac{1}{T^2}$ от $\cos \frac{\alpha}{2}$ является линейной.

Результаты измерений периодов колебаний и необходимые расчеты приведены в Таблицах 1 и 2. В каждом случае измерение периодов проведено 3 раза и проведено усреднение результатов.

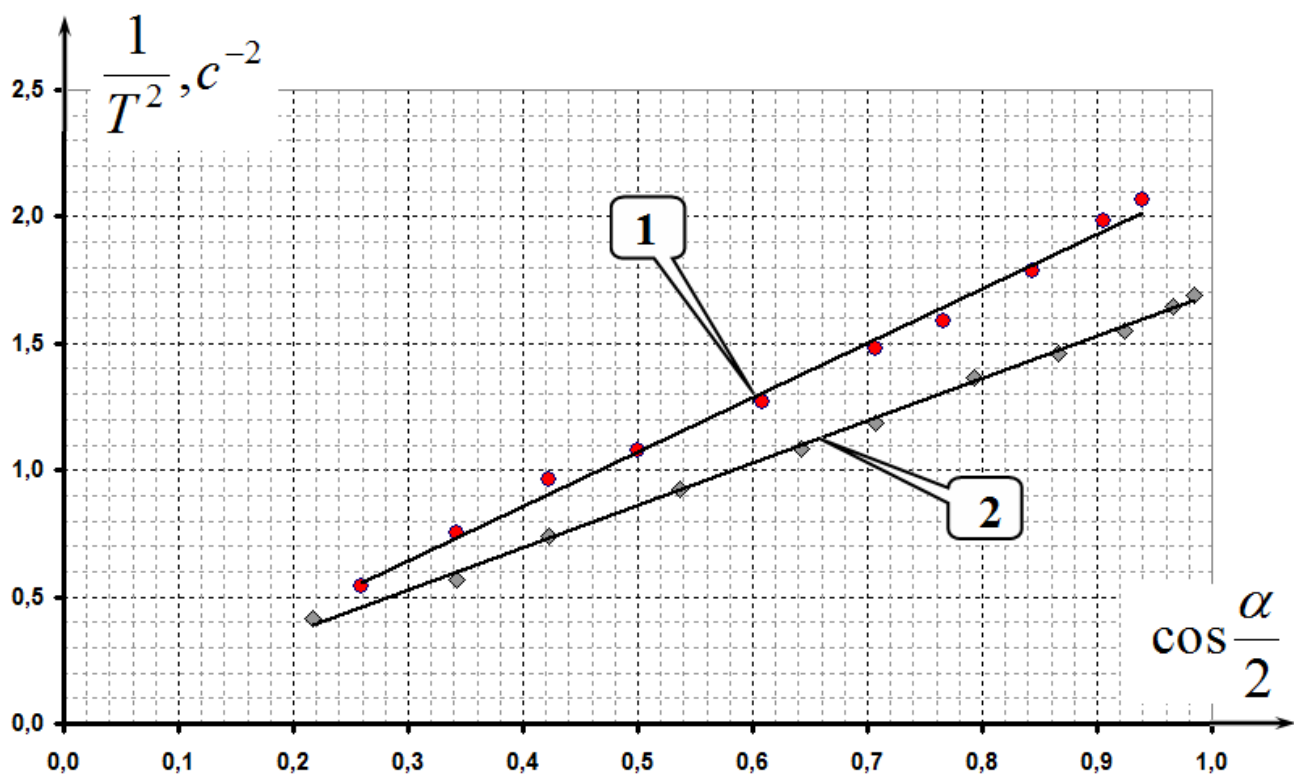
Таблица 1. Спица без грузов

α°	$T_{1,1}, \text{ с}$	$T_{1,2}, \text{ с}$	$T_{1,3}, \text{ с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{ с}$	$\frac{1}{\langle T_1 \rangle^2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$
40	0,696	0,692	0,699	0,696	2,07	0,9397
50	0,710	0,707	0,712	0,710	1,99	0,9063
65	0,741	0,753	0,752	0,749	1,78	0,8434
80	0,794	0,789	0,796	0,793	1,59	0,7660
90	0,819	0,826	0,820	0,822	1,48	0,7071
105	0,886	0,890	0,884	0,887	1,27	0,6088
120	0,962	0,977	0,949	0,963	1,08	0,5000
130	1,024	1,018	1,020	1,021	0,96	0,4226
140	1,161	1,150	1,154	1,155	0,75	0,3420
150	1,381	1,343	1,348	1,357	0,54	0,2588

Таблица 2. Спица с грузами

α°	$T_{1,1}, \text{ с}$	$T_{1,2}, \text{ с}$	$T_{1,3}, \text{ с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{ с}$	$\frac{1}{\langle T_1 \rangle^2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$
20	0,771	0,768	0,770	0,770	1,69	0,9848
30	0,783	0,778	0,777	0,779	1,65	0,9659
45	0,810	0,796	0,804	0,803	1,55	0,9239
60	0,832	0,827	0,821	0,827	1,46	0,8660
75	0,853	0,868	0,848	0,856	1,36	0,7934
90	0,913	0,918	0,920	0,917	1,19	0,7071
100	0,954	0,958	0,966	0,959	1,09	0,6428
115	1,040	1,038	1,045	1,041	0,92	0,5373
130	1,167	1,159	1,161	1,162	0,74	0,4226
140	1,325	1,337	1,321	1,328	0,57	0,3420
155	1,558	1,520	1,573	1,550	0,42	0,2164

На рисунке показаны графики линеаризованных зависимостей $\frac{1}{T^2}$ от $\cos \frac{\alpha}{2}$ (1 - без грузов, 2 – с грузами).



Обе полученные зависимости являются линейными, что подтверждает теоретически полученный вид зависимостей (6) и (7).

Из этих же формул следует, что отношение коэффициентов наклона графиков равно

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{1 + 3\frac{m_0}{m}}{1 + 2\frac{m_0}{m}}. \quad (8)$$

Значение этих коэффициентов, рассчитанные по методу наименьших квадратов, равны:

$$\begin{aligned} K_1 &= 2,15 \, c^{-2} \\ K_2 &= 1,67 \, c^{-2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому их отношение $\gamma = 1,29$. Теперь используя формулу (8), можно найти требуемое отношение масс:

$$\gamma = \frac{1 + 3\frac{m_0}{m}}{1 + 2\frac{m_0}{m}} \Rightarrow \frac{m_0}{m} = \frac{\gamma - 1}{3 - 2\gamma} = 0,68. \quad (10)$$