

-3. Автоколебания

Условие

Задача 11-3. Автоколебания

В данной задаче рассматривается поведение следующего механического устройства. На горизонтальный вал 1 радиуса $r = 2,0$ см насажена муфта 2, к которой жестко прикреплен стержень 3, на конце которого закреплен массивный шарик 4. Шарик, стержень и муфту будем называть маятником. Масса шарика m значительно больше массы стержня и муфты. Расстояние от оси вала до центра шарика равно $l = 8,0$ см. Шарик можно рассматривать как материальную точку. Между муфтой и валом существует небольшой зазор.

Вал может вращаться с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси.

Коэффициент трения покоя между муфтой и валом равен $\mu_0 = 0,80$, коэффициент трения скольжения $\mu = 0,60$. Ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{м}{с^2}$.

Положение стержня будем задавать углом его отклонения от вертикали φ .

В приближении малых колебаний применимы приближенные формулы

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

Часть 1. Вал неподвижен, трения нет!

В данной части задачи рассмотрим поведение стержня на неподвижном валу, при условии, что трение пренебрежимо мало.

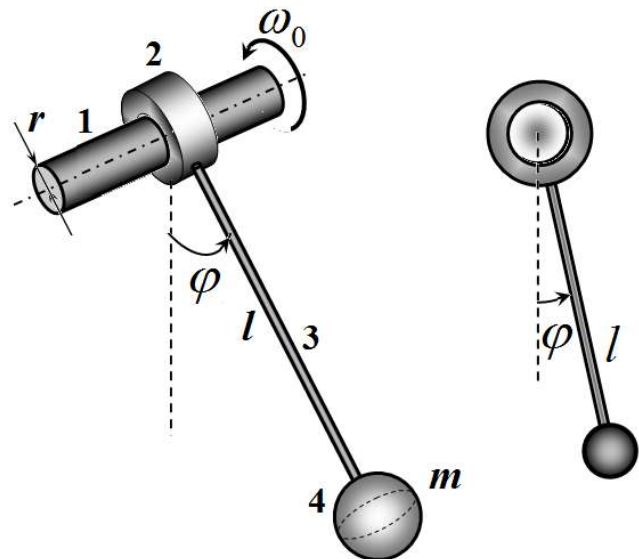
1.1 Чему равен период малых свободных колебаний стержня?

1.2 Стержень отклонили на угол $\varphi_0 = 30^\circ$ от вертикали и отпустили. Запишите закон движения стержня, то есть зависимость угла отклонения от времени $\varphi(t)$. Запишите зависимость угловой скорости движения стержня от времени $\omega(t)$.

*Отклонение в 30° можно считать малым.

1.3 Постройте схематически фазовую диаграмму движения стержня.

Фазовой диаграммой называется кривая, описывающая зависимость угловой скорости от угла отклонения $\omega(\varphi)$.*



Часть 2. Вал неподвижен, трение есть!

В данной части задачи по-прежнему вал неподвижен, но учитываем силу трения, действующую между валом и муфтой. Можно считать, что модуль силы трения в процессе малых колебаний стержня остается постоянным.

2.1 Укажите максимальный угол отклонения стержня, при котором он еще может находиться в состоянии покоя.

2.2 Стержень отклонили на угол $\varphi_0 = 30^\circ$ от вертикали и отпустили. Найдите угол отклонения стержня в момент следующей остановки.

2.3 Нарисуйте схематическую фазовую траекторию движения маятника в этом случае.

Часть 3. Вал вращается, трение есть!

Рассмотрим поведение маятника на вращающемся валу с относительно небольшой скоростью

3.1 Определите на какой максимальный угол может отклониться маятник при вращении вала под действием силы трения покоя.

3.2 Определите положение равновесия маятника, при условии, что муфта проскальзывает по валу.

3.2 Качественно опишите процесс движения маятника. Покажите, что маятник будет колебаться. На каком этапе его движения он будет получать энергию, чтобы компенсировать потери на трение? Постройте схематически фазовую траекторию движения маятника в этом случае.

Решение

Задача 11-3. Автоколебания

Часть 1. Вал неподвижен, трения нет!

1.1 Период малых свободных колебаний стержня можно рассчитать по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,08}{9,8}} = 0,57\text{с}. \quad (1)$$

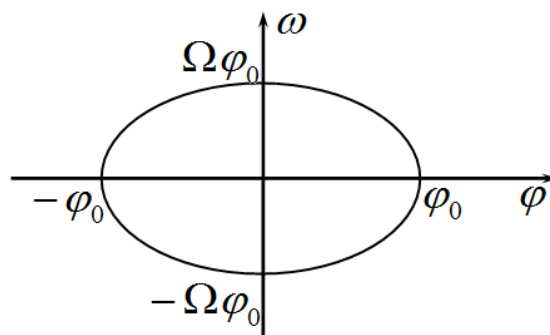
1.2 Закон движения стержня, то есть зависимость угла отклонения от времени $\varphi(t)$, есть закон гармонических колебаний

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t, \quad (2)$$

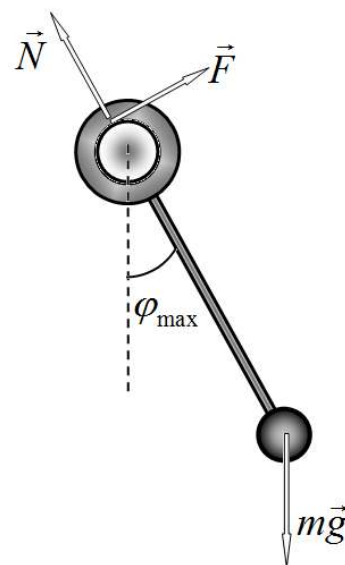
где $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ круговая частота колебаний стержня. Зависимость угловой скорости движения стержня от времени $\omega(t)$ имеет вид

$$\omega(t) = -\varphi_0 \Omega \sin \Omega t. \quad (3)$$

*Отклонение в 30° можно считать малым.



1.3 Фазовая диаграмма движения стержня является эллипсом. **Часть 2. Вал неподвижен, трение постоянно.**



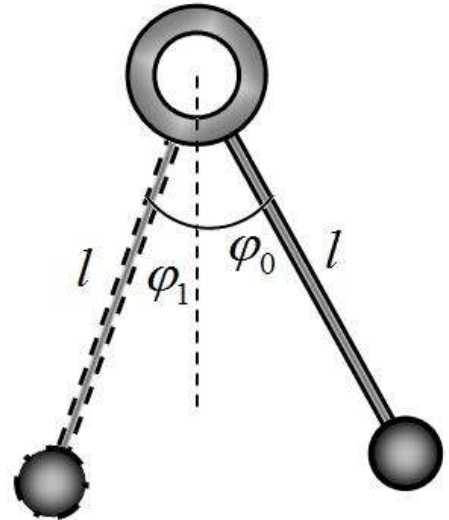
2.1 Из рисунка, на котором изображены силы, действующие на маятник следует:

$$N = mg \cos \varphi_{\max}. \quad (4)$$

Величина силы трения $F = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \varphi_{\max}$. В состоянии равновесия сумма моментов силы, действующих на маятник равна нулю, поэтому

$$\mu_0 mg \cos \varphi_{\max} \cdot r = mgl \sin \varphi_{\max} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \mu_0 \frac{r}{l} = 8,0 \frac{2,0}{0,8} = 0,20 \Rightarrow \varphi_{\max} \approx 11^\circ. \quad (5)$$



2.2 Изменение энергии маятника равно работе силы трения, поэтому

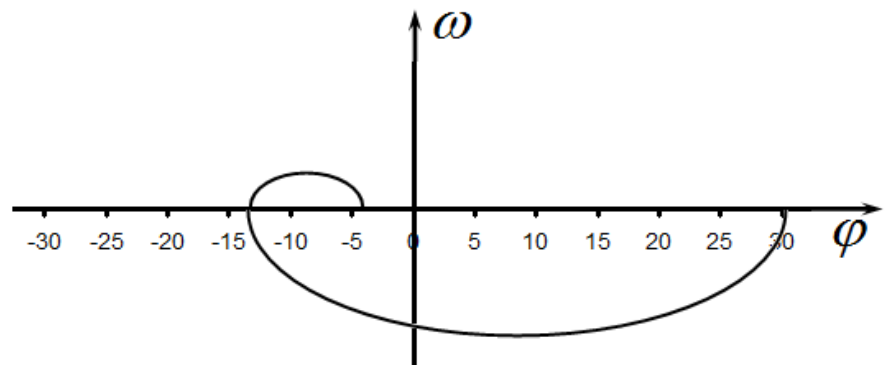
$$-mgl \cos \varphi_0 - (-mgl \cos \varphi_1) = \mu mgr(\varphi_0 + \varphi_1). \quad (6)$$

Полагая углы малыми и, пользуясь приближенной формулой для косинуса, получим

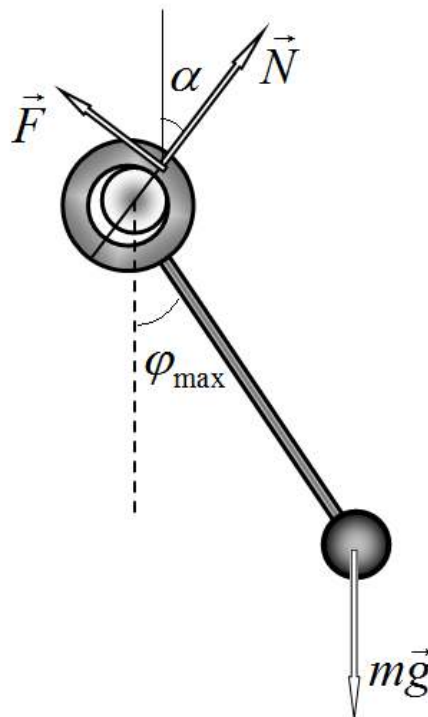
$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = 2\mu \frac{r}{l}(\varphi_0 + \varphi_1) \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - 2\mu \frac{r}{l} \quad (7)$$

То есть угол отклонения уменьшается на величину $\Delta\varphi = 2\mu \frac{r}{l} = 2 \cdot 0,6 \frac{2}{8} = 0,30 = 17^\circ$. Аналогичное уменьшение будет и до второй остановки.



2.3 Итак первая остановка произойдет при $\varphi_1 = -(30^\circ - 17^\circ) = -13^\circ$, следующая остановка $\varphi_2 = -4^\circ$ попадает в зону застоя, т.е. маятник остановится. Схематически фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рисунке.



Часть 3. Вал вращается, трение есть!

3.1 Максимальный угол отклонения определяется трением покоя. Силы, действующие на маятник на вращающемся против часовой стрелки валу, показаны на рисунке. Угол α задает направление на точку касания муфты и вала. Запишем условия равновесия маятника. В проекции на горизонтальную ось

$$N \sin \alpha = F \cos \alpha = \mu_0 N \cos \alpha \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_0. \quad (10)$$

В проекции на вертикаль:

$$mg = N \cos \alpha + \mu_0 N \sin \alpha \quad (11)$$

С учетом (10) последнее выражение преобразуется к виду

$$mg = N \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha N \sin \alpha \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} = mg \cos \alpha \quad (12)$$

Тогда сила трения описывается формулой (опять же, принимая во внимание формулу (10))

$$F = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \alpha = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_o^2}} mg. \quad (13)$$

Наконец, запишем условие равенства моментов сил, действующих на маятник

$$\frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_o^2}} mgr = mgl \sin \varphi_{\max} \quad (14)$$

Из которого находим

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_o^2}} \frac{r}{l} = 0,16$$

$$\varphi_{\max} = 9,0^\circ$$

3.2 Для расчета положения равновесия можно воспользоваться формулой (15), в которой заменить коэффициент трения покоя на коэффициент трения скольжения

$$\sin \bar{\varphi} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{r}{l} = 0,13$$

$$\varphi_{\max} = 7,0^\circ$$

3.3 Качественно процесс движения маятника будет происходить следующим образом.

Вначале маятник неподвижен относительно вала и поднимается с угловой скоростью ω_0 , равной скорости вращения вала (участок 1-2) Достигнув максимально возможной высоты, найденной в п. 3.1 он начнет проскальзывать (точка 2) . Сила трения скачком уменьшается, маятник по инерции продолжает подниматься. Искерпав запас кинетической энергии в некоторой точке 3, он остановится. Так как он не попадает в зону застоя, то начнет двигаться вниз (участок 3-4). На этом этапе его фазовая траектория совпадает с траекторией затухающих колебаний. Достигнув максимального отклонения в точке 4, он начнет двигаться в противоположном направлении, при этом его скорость будет возрастать. Когда его скорость достигнет значения ω_0 , опять «включится» сила трения покоя, под действием которой он будет подниматься. Далее процесс повторяется. Понятно, что подкачка энергии маятника происходит благодаря работе силы трения покоя на участке 1-2.

