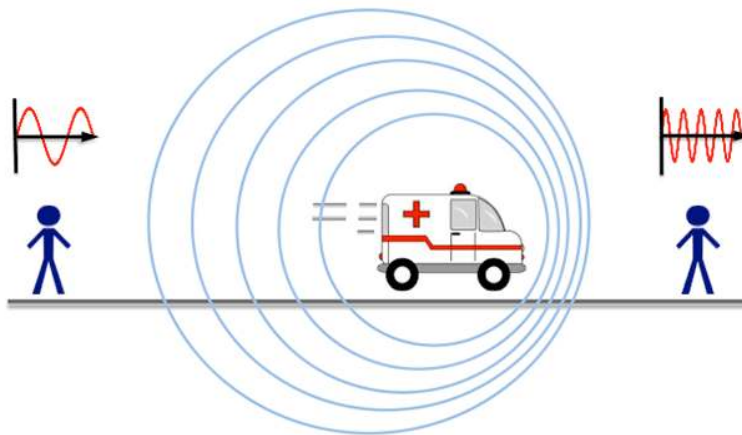


Условие

Задача 11-2. Звуковые волны, эффект Доплера.

При движении относительно друг друга излучателя и приёмника волн наблюдается эффект изменения частоты волн, который получил название эффекта Доплера. Сущность данного эффекта представлена на рисунке 1.

1. Неподвижный источник



излучает звуковые волны частотой ν . Если источник звука движется по направлению к покоящемуся приёмнику с постоянной скоростью v , то приёмник регистрирует сигнал частотой ν' , если источник удаляется от покоящегося приёмника с постоянной скоростью v , то приёмник регистрирует сигнал частотой ν'' .

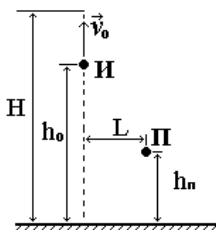
Рисунок 1.

Скорость звука в среде не зависит от скорости источника и приёмника звука. Среда однородная и неподвижная. Во всех пунктах данной задачи источник и приёмник звука считайте точечными, скорость звука в среде c .

1.1. Укажите соотношение между частотами ν' и ν'' (больше, меньше).

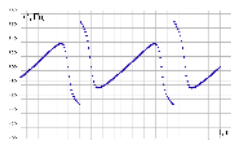
1.2. Покажите, что

$$\nu' = \frac{c\nu}{c - v}. \quad (1)$$



1.3. Покажите, что

$$\nu'' = \frac{c\nu}{c + v}. \quad (2)$$



Указание. Если Вам не удалось вывести уравнения (1) и (2), то далее в случае необходимости Вы можете пользоваться ими в готовом виде.*

2. Источник звука помещён внутри абсолютно упругого мяча (шара). Мяч находится на некоторой высоте h_0 над абсолютно упругой горизонтальной поверхностью, мячу сообщают скорость v_0 направленную вертикально вверх. На некотором расстоянии L от траектории движения мяча и на некоторой высоте h_{π} над поверхностью находится приёмник звука $h_0 > h_{\pi}$ (рис.2). Зависимость частоты звука от времени $\nu'(t)$, регистрируемого приёмником, показана на графике (рис.3). Частота звука, излучаемого неподвижным источником, $\nu = 500$ Гц.

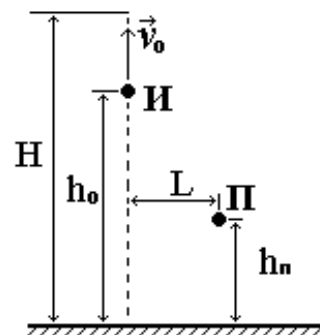
$$\nu' = \frac{c\nu}{c - v} \quad (1).$$

Сопротивление воздуха не учитывать. Запаздыванием звукового сигнала пренебречь.

Определите:

- 2.1. Максимальную высоту подъёма мяча H ,
- 2.2. Начальную скорость мяча v_0 ,
- 2.3. Высоту h_0 ,
- 2.4. Высоту h_{π} приёмника над поверхностью,
- 2.5. Расстояние L от приёмника до траектории движения мяча.

Рисунок 2.



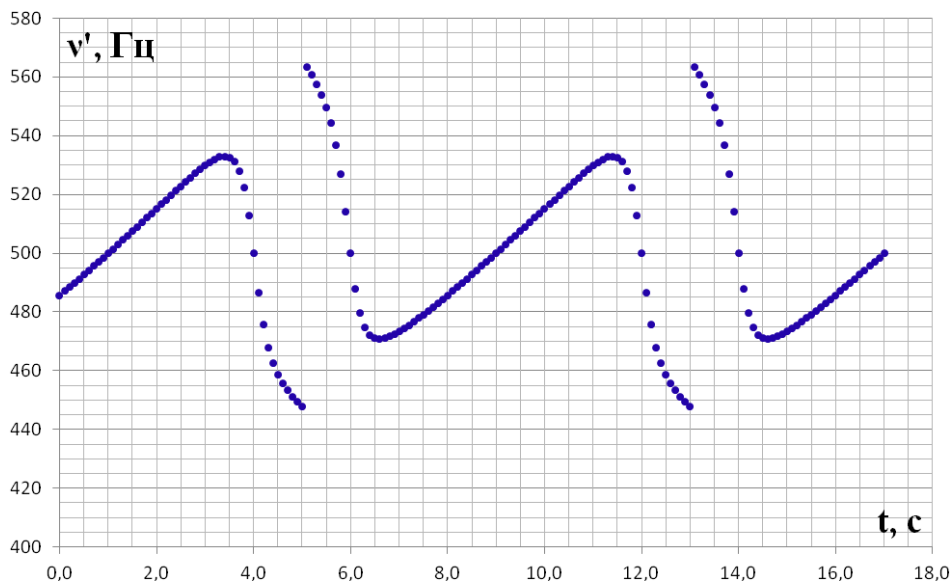


Рисунок 3.

3. Движение источника звука по окружности (*запаздыванием звукового сигнала пренебречь*).

3.1. Источник звука движется по окружности радиуса r со скоростью v . Приемник звука находится на расстоянии $R = 2r$ от центра окружности, по которой движется источник. Сделайте рисунок и укажите следующие точки на окружности: А – точка, в которой должен находиться источник, когда приёмник будет регистрировать сигналы наименьшей частоты; В – точка, в которой должен находиться источник, когда приёмник будет регистрировать сигналы наибольшей частоты; С и D – точки, в которой должен находиться источник, когда приёмник будет регистрировать сигналы с частотой, равной частоте излучения неподвижного источника.

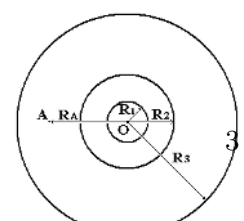
3.2. Источник звука движется по окружности радиуса r со скоростью $v = 0,3c$. Период обращения источника звука T . Приемник звука находится на расстоянии $R \gg r$ от центра окружности, по которой движется источник. Постройте график зависимости частоты звука от времени $\nu'(t)$, регистрируемого приёмником, за промежуток времени равному двум периодам обращения источника звука по окружности. За начало отсчёта времени возьмите момент, когда расстояние между источником и приёмником было наименьшим. График постройте в относительных координатах $(\frac{\nu'}{\nu}; \frac{t}{T})$. *Подсказка:* для построения графика уравнение зависимости $\nu'(t)$ получать необязательно.

$$\left(\frac{\nu'}{\nu}; \frac{t}{T}\right)$$

Решение

Задача 11-2. Звуковые волны, эффект Доплера.

1.1. Потенциал на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции потенциалов. Потенциал каждой из сфер будет определяться не только зарядом данной сферы, но и зарядами двух других сфер.



Потенциал на внешней поверхности первой сферы:

$$\varphi_1 = k \frac{q}{R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{10}{4} k \frac{q}{R} \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 \quad (9)$$

Потенциал на внешней поверхности второй сферы:

$$\varphi_2 = k \frac{q}{2R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = 2k \frac{q}{R} \quad (2)$$

$$E_D = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (24)$$

Потенциал на внешней поверхности третьей сферы:

$$\varphi_3 = k \frac{q}{4R} + k \frac{4q}{4R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{3}{4} k \frac{q}{R} \quad (3)$$

$$k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (25)$$

Потенциал в точке А:

$$\varphi_A = k \frac{q}{3R} + k \frac{4q}{3R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{7}{6} k \frac{q}{R} \quad (4)$$

$$k \frac{q_1'''}{R} + k \frac{q_{c1}'}{R} + k \frac{q_{c2}'}{3R} + k \frac{3q}{3R} = 0 \quad (36)$$

Напряжённости электрических полей на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции напряжённостей. Векторы напряжённостей электрических полей, создаваемых концентрическими сферами, будут направлены радиально к поверхностям сфер. Поэтому суммирование напряжённостей полей производится алгебраически. Также учитываем, что напряжённость электрического поля внутри сферы равна нулю.

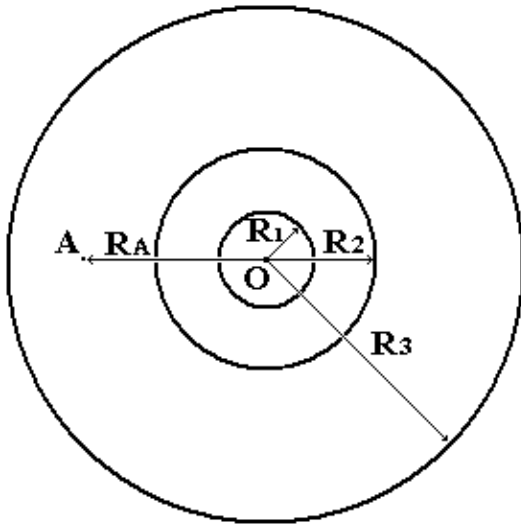
Напряжённость на внешней поверхности первой сферы:

$$E_1 = k \frac{q}{R^2} \quad (5)$$

$$k \frac{q_1'''}{R^2} + k \frac{q_{c1}'}{R^2} = k \frac{q_1'''}{\varepsilon R^2} \quad (37)$$

Напряжённость на внешней поверхности второй сферы:

$$E_2 = k \frac{q}{4R^2} + k \frac{4q}{4R^2} = \frac{5}{4} k \frac{q}{R^2} \quad (6)$$



Напряжённость на внешней поверхности третьей сферы:

$$E_3 = k \frac{q}{16R^2} + k \frac{4q}{16R^2} - k \frac{2q}{16R^2} = \frac{3}{16} k \frac{q}{R^2} \quad (7)$$

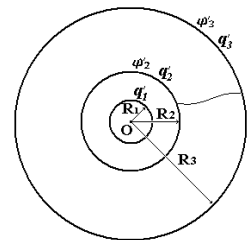
$$\varphi_1 = k \frac{q}{R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{10}{4} k \frac{q}{R} \quad (1)$$

Напряжённость в точке А:

$$E_A = k \frac{q}{9R^2} + k \frac{4q}{9R^2} = \frac{5}{9} k \frac{q}{R^2} \quad (8)$$

$$\varphi_2 = k \frac{q}{2R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = 2k \frac{q}{R} \quad (2)$$

1.2. После соединения второй и третьей сфер проводником между ними происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными. Суммарный заряд этих двух сфер сохраняется.



$$\varphi'_2 = \varphi'_3 \quad (9)$$

$$q'_2 + q'_3 = q_2 + q_3 \quad (10)$$

$$E_1 = k \frac{q}{R^2} \quad (5)$$

Рисунок 2.

$$q_2' + q_3' = 2q \quad (11)$$

$$E_3 = k \frac{q}{16R^2} + k \frac{4q}{16R^2} - k \frac{2q}{16R^2} = \frac{3}{16} k \frac{q}{R^2} \quad (7)$$

$$E_2 = k \frac{q}{4R^2} + k \frac{4q}{4R^2} = \frac{5}{4} k \frac{q}{R^2} \quad (6)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

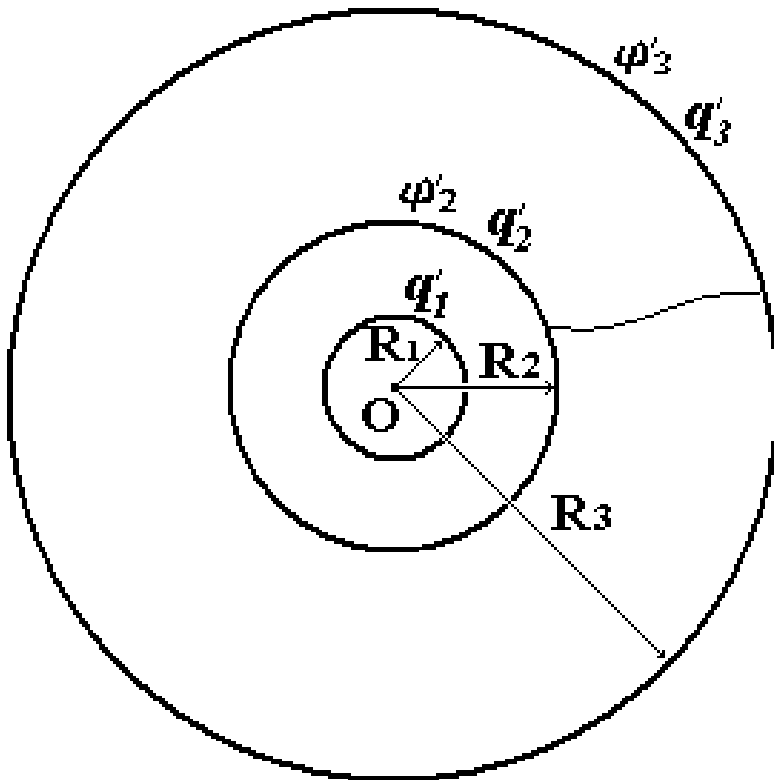
$$q_1' = q_1 = q \quad (12)$$

$$E_A = k \frac{q}{9R^2} + k \frac{4q}{9R^2} = \frac{5}{9} k \frac{q}{R^2} \quad (8)$$

Уравнение (9) запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (13)$$

Из (13) получим:



$$q_2' = -q \quad (14)$$

Из (11) получим:

$$q_2' + q_3' = q_2 + q_3 \quad (10)$$

$$q_3' = 3q \quad (15)$$

1.3.

$$q_2' + q_3' = 2q \quad (11)$$

После заземления второй и третьей сфер между ними и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными нулю.

$$\varphi_2' = \varphi_3' = 0 \quad (16)$$

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (13)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q_1' = q_1 = q \quad (17)$$

$$q_2' = -q \quad (14)$$

По заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = q_2' + q_3' - q_2 - q_3 \quad (18)$$

$$q_3' = 3q \quad (15)$$

Равенство потенциалов $\varphi_2' = \varphi_3'$ запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (19)$$

Равенство потенциалов $\varphi_2' = \varphi_3'$ запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (19)$$

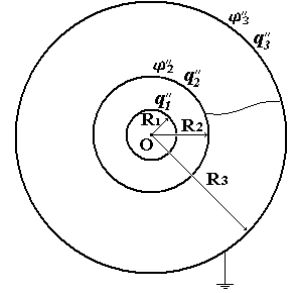
Из (19) получим:

$$q_2' = -q \quad (20)$$

$$q_2' = -q \quad (20)$$

Учитывая, что $\varphi_3' = 0$

$$q_3' = 0 \quad (21)$$



Учитывая, что $\varphi_3' = 0$ получим:

$$q_3' = 0 \quad (21)$$

Следовательно, по заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = 3q \quad (22)$$

2.1.

$$q_1' = q_1 = q \quad (17)$$

Диэлектрический слой «заменяем» двумя сферами радиусами R и $3R$, и зарядами q_{c1} и q_{c2} . На рисунке 4 данные сферы обозначены пунктиром. Напряжённость электрического поля на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы можно определить как

$$E_D = k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} \quad (23)$$

Равенство потенциалов $\varphi_2' = \varphi_3'$ запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (19)$$

или как

$$E_D = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (24)$$

$$q_2' = -q \quad (20)$$

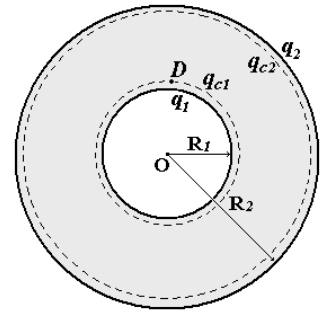
Учитывая, что $\varphi_3' = 0$

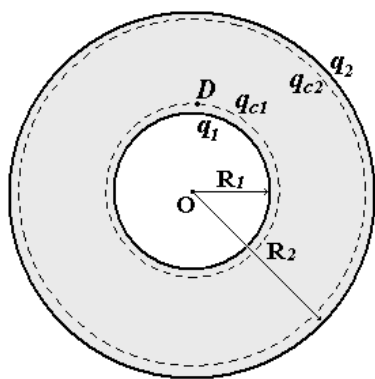
$$q_3' = 0 \quad (21)$$

Приравнивая правые части (23) и (24) определим величину связанных зарядов, образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы q_{c1} .

$$k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (25)$$

$$q_{c1} = q \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (26)$$





$$\Delta q = 3q \quad (22)$$

Величину связанных зарядов, образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внешней сферы q_{c2} , определим используя закон сохранения электрического заряда. Диэлектрический слой, согласно условия задачи, электрически нейтрален. Поэтому

$$q_{c1} + q_{c2} = 0 \quad (27)$$

$$E_D = k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} \quad (23)$$

Подставляя в (27) значение q_{c1} , получим:

$$q_{c2} = q \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad (28)$$

2.2.

$$q_{c1} = q \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (26)$$

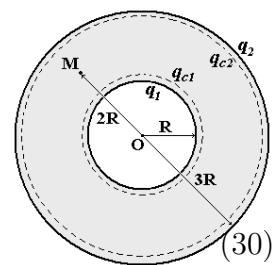
Потенциалы определяем по принципу суперпозиции потенциалов.

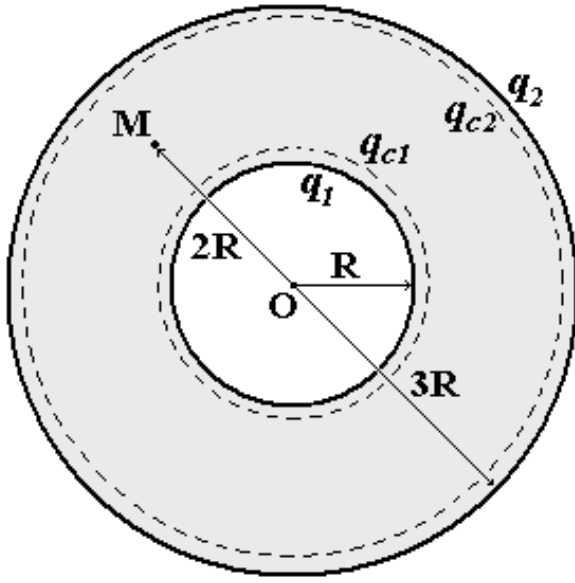
$$\varphi_R = k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_{c1}}{R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (29)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q_1}{2R} + k \frac{q_{c1}}{2R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R}$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q_1}{3R} + k \frac{q_{c1}}{3R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (31)$$

$$\varphi_R = k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_{c1}}{R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (29)$$





$$q_{c2} = q \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad (28)$$

Подставляя значения зарядов q_1 , q_2 , q_{c1} , q_{c2} , получим:

$$\varphi_R = k \frac{q}{R} + k \frac{q}{R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(4\varepsilon + 2)}{3\varepsilon} \quad (32)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q}{2R} + k \frac{q}{2R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(8\varepsilon + 1)}{6\varepsilon} \quad (33)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q}{3R} + k \frac{q}{3R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{4}{3} \quad (34)$$

2.3.

$$\varphi_R = k \frac{q}{R} + k \frac{q}{R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(4\varepsilon + 2)}{3\varepsilon} \quad (32)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q_1}{3R} + k \frac{q_{c1}}{3R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (31)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q_1}{2R} + k \frac{q_{c1}}{2R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (30)$$

После заземления внутренней сферы между ней и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциал этой сферы становится равным нулю.

$$\varphi_1'' = 0 \quad (35)$$

Потенциал φ_1'' запишем, используя принцип суперпозиции потенциалов:

$$k \frac{q_1''}{R} + k \frac{q'_{c1}}{R} + k \frac{q'_{c2}}{3R} + k \frac{3q}{3R} = 0 \quad (36)$$

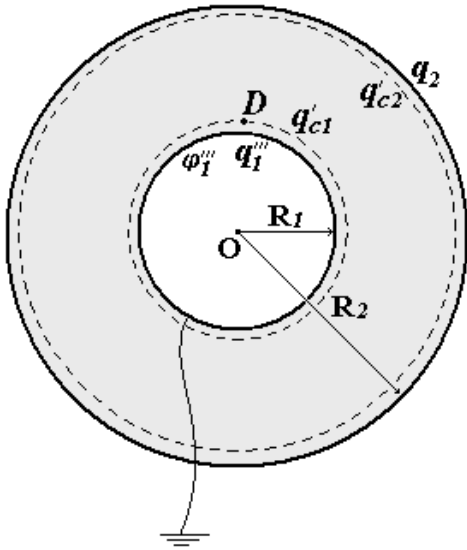
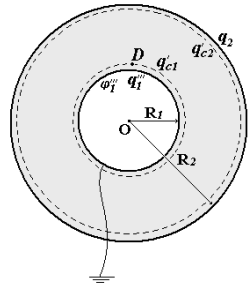
$$\varphi_{3R} = k \frac{q}{3R} + k \frac{q}{3R} \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \quad (34)$$

Для напряжённости электрического поля в точке D получим уравнение

$$k \frac{q_1''}{R^2} + k \frac{q'_{c1}}{R^2} = k \frac{q_1''}{\varepsilon R^2} \quad (37)$$

Рисунок 5.

Рисунок 6.



Так же примем во внимание, что диэлектрический слой остаётся электрически нейтральным, а следовательно

$$q'_{c1} + q'_{c2} = 0. \quad (38)$$

$$q'_{c1} + q'_{c2} = 0 \quad (38)$$

Решив систему уравнений (36), (37) и (38), получим:

$$\dot{q}_{c2} = -q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (41)$$

$$\dot{q}_{c1} = q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (40)$$

$$q_1''' = -q \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \quad (39)$$

$$q_1'' = -q \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \quad (39)$$

$$q_{c1}' = q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (40)$$

$$q_{c2}' = -q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (41)$$