

Условие

Задача 10 - 3. «Мягкая» пружина

($n = 10$) длиной $l_1 = 5,00$ см
жесткости $k_1 = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ каждая, спа

($n = 10$) длиной $l_1 = 5,00$ см
жесткости $k_1 = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ каждая, спа
1. Десять пружин ($n = 10$) длиной $l_1 = 5,00$ см, массой $m_1 = 10,0$ г каждая и с коэффициентом жесткости $k_1 = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ каждая, спаяны последовательно в цепочку. Растяжением каждой из пружин под действием собственного веса можно пренебречь. ($g = 10,0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$)

$$m_1 = 10,0 \text{ г}$$

1.1. Определите длину l' такой цепочки, если цепочку подвесить вертикально, закрепив за один из её концов.

1.2. Сколько таких пружин нужно последовательно спаять в цепочку, чтобы длина цепочки под действием собственного веса увеличилась в два раза?

2. Пружина, которая может растягиваться под действием собственного веса, имеет массу m , длину l , коэффициент жесткости k .

2.1. Определите деформацию пружины Δx , если её подвесить вертикально за один из концов.

2.2. При каком коэффициенте жесткости пружины k её деформация под действием собственного веса Δx будет равно её длине l в недеформированном состоянии?

3. Пружина, которая может растягиваться под действием собственного веса, массой m , длиной l , и коэффициентом жесткости k , лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между пружиной и поверхностью μ . К одному из краёв пружины прикладывают силу F .

3.1. Определите установившуюся деформацию пружины Δx , при её равномерном движении.

$$F = 2\mu mg.$$

$$\text{жесткости } \Delta x = l$$

3.2. Определите деформацию пружины Δx , если $F = 2\mu mg$.

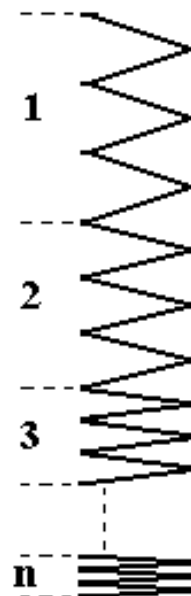
3.3. При каком значении силы F деформацию пружины $\Delta x = l$?

Решение

Задача 10 - 3. «Мягкая» пружина

Задача 10-3.

1.1.



Длина всей цепочки, подвешенной вертикально

$$l' = nl_1 + \Delta x \quad (1)$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1}, \quad (2)$$

$$l' = nl_1 + \Delta x \quad (1).$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} \quad (2)$$

где, Δx - удлинение всей цепочки. $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}$ - удлинения первого, второго ... $(n-1)$ -го звеньев, считая сверху. Верхнее первое звено будет деформироваться под действием веса нижних $(n-1)$ звеньев. Условие равновесия для них имеет вид:

$$k_1 \Delta x_1 = (n-1)m_1 g. \quad (3)$$

$$k_1 \Delta x_1 = (n-1)m_1 g \quad (3)$$

и для нижних $(n-2)$ звеньев

$$k_1 \Delta x_2 = (n-2)m_1 g \quad (4)$$

Условие равновесия для нижних $(n - 2)$ звеньев –

$$k_1 \Delta x_2 = (n - 2)m_1 g, \quad (4)$$

для $(n - i)$ звеньев –

$$k_1 \Delta x_i = (n - i)m_1 g, \quad (5)$$

$$l' = nl_1 + \Delta x \quad (1).$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{n-1} \quad (2)$$

для нижнего n -го звена –

$$k_1 \Delta x_{n-1} = m_1 g. \quad (6)$$

$$k_1 \Delta x_1 = (n - 1)m_1 g \quad (3)$$

и для нижних $(n - 2)$ звеньев

$$k_1 \Delta x_2 = (n - 2)m_1 g \quad (4)$$

Нижнее n -ое звено не деформируется. Подставляя уравнения (3), (4), (5), (6), в (2) получим:

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1} (1 + 2 + \dots + n - 1). \quad (7)$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1} (1 + 2 + \dots + n - 1) \quad (7).$$

$(1 + 2 + \dots + n - 1)$ – сумма $(n - 1)$ первых членов

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2} (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (8).$$

$(1 + 2 + \dots + n - 1)$ – сумма $(n - 1)$ первых членов арифметической прогрессии

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2} (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}. \quad (8)$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g n(n - 1)}{2k_1}. \quad (9)$$

$$l' = 10 \cdot 5,00 \text{ см} + 4,50 \text{ см} = 54,5 \text{ см}.$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1} (1 + 2 + \dots + n - 1) \quad (7).$$

$(1 + 2 + \dots + n - 1)$ – сумма $(n - 1)$ первых членов

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2} (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (8).$$

$$k_1 \Delta x_i = (n - i) m_1 g \quad (5)$$

1.2. Согласно условию

$$\Delta x = n l_1. \quad (10)$$

$$\Delta x = \frac{m_1 g}{k_1} (1 + 2 + \dots + n - 1) \quad (7).$$

$(1 + 2 + \dots + n - 1)$ – сумма $(n - 1)$ первых членов

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{1 + n - 1}{2} (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} \quad (8).$$

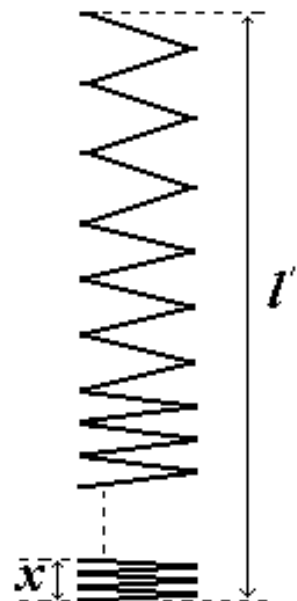
Подставляя (10) в (9) получим:

$$n l_1 = \frac{m_1 g n (n - 1)}{2 k_1} \quad (11).$$

$$n l_1 = \frac{m_1 g n (n - 1)}{2 k_1} \quad (11).$$

Откуда

2.1.



Выберем снизу пружины участок длиной x растяжением под действием собственного веса, которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной l можно рассматривать как $\frac{l}{x} = n$ пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна $k_1 = nk$ (13).

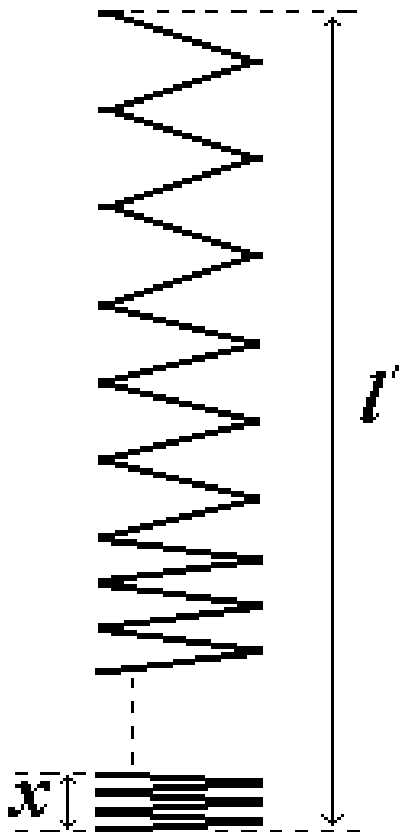
$$nl_1 = \frac{m_1 g n(n-1)}{2k_1} \quad (11).$$

Деформацию первого сверху участка длиной x можно найти из условия равновесия оставшейся нижней части пружины (рис.3).

$$(m - m_1)g = k_1 \Delta x_1 \quad (14).$$

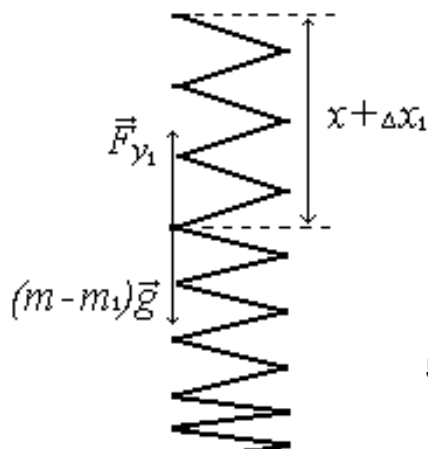
$$m_1 = \frac{x}{l} m \quad (15) \text{ - масса участка пружины длиной } x.$$

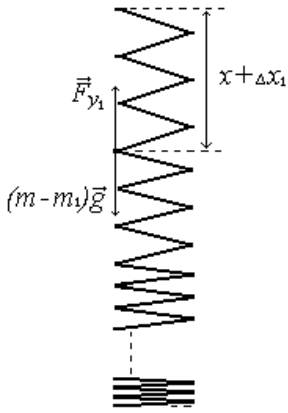
$$k_1 = nk \quad (13).$$



Учитывая (13) и (15), уравнение (14) примет вид:

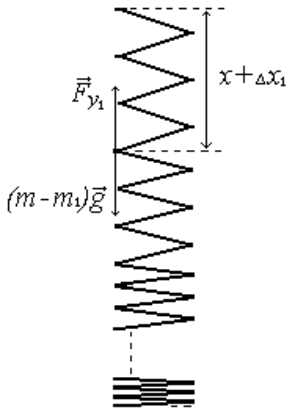
$$(m - \frac{x}{l} m) g = nk \Delta x_1 \quad (16).$$





Учитывая, что $\frac{l}{x} = n$ получим:

$$\left(m - \frac{1}{n}m\right)g = nk\Delta x_1(17).$$



Откуда

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)mg}{n^2k}(18).$$

$$m_1 = \frac{x}{l}m \quad (15)$$

Деформация второго сверху участка находится аналогично:

$$(m - 2m_1)g = k_1\Delta x_2(19).$$

$$\left(m - \frac{2x}{l}m\right)g = nk\Delta x_2(20).$$

$$\left(m - \frac{2}{n}m\right)g = nk\Delta x_2(21).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)mg}{n^2k}(22).$$

$$(m - 2m_1)g = k_1\Delta x_2(19).$$

$$\left(m - \frac{x}{l}m\right)g = nk\Delta x_1(16).$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)mg}{n^2k}(18).$$

$$\left(m - \frac{1}{n}m\right)g = nk\Delta x_1(17).$$

Для i -го участка

$$\Delta x_i = \frac{(n-i)mg}{n^2k}(23).$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)mg}{n^2k}(22).$$

Учитывая, что

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \dots + \Delta x_{n-1}(2),$$

$$\Delta x_i = \frac{(n-i)mg}{n^2k}(23).$$

получим

$$\Delta x = \frac{mg}{n^2k}(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{mg(n-1)}{2nk}(24).$$

При $n \rightarrow \infty$, др

$$\Delta x = \frac{mg}{2k}(25).$$

$$\Delta x = \frac{mg}{n^2k}(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{mg(n-1)}{2nk}(24).$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_1 + \dots + \Delta x_{n-1}(2).$$

При $n \rightarrow \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\Delta x = \frac{mg}{2k}(25).$$

2.2. Так как по условию задачи $\Delta x = l$, то из (25) получим:

$$l = \frac{mg}{2k}(26).$$

При $n \rightarrow \infty$, др

$$\Delta x = \frac{mg}{2k}(25).$$

Откуда

$$k = \frac{mg}{2l}(27).$$

$$l = \frac{mg}{2k} \quad (26).$$

3.1. При равномерном движении пружины по горизонтальной поверхности внешняя сила F равна силе трения действующей на пружину со стороны поверхности

Выберем возле свободного конца пружины участок длиной x , деформацией которого можно пренебречь. Тогда недеформированную пружину длиной l можно рассматривать как $\frac{l}{x} = n$ пружин соединённых последовательно, жёсткость каждой из которых равна

$$k_1 = nk \quad (13).$$

Для i -ой части пружины длиной x , находящейся слева, справедливо уравнение:

$$nk\Delta x_{n-1} = \mu \frac{x}{l} mg \quad (29).$$

$$nk\Delta x_{n-1} = \mu \frac{x}{l} mg \quad (29).$$

Для i -ой и $(n-1)$ -ой час

$$nk\Delta x_{n-2} = \mu \frac{2x}{l} mg \quad (30).$$

Для i -ой и $(n-1)$ -ой части пружины справедливо уравнение:

$$nk\Delta x_{n-2} = \mu \frac{2x}{l} mg \quad (30).$$

Для i частей пружинь

$$nk\Delta x_{n-i} = \mu \frac{ix}{l} mg \quad (31).$$

Для i частей пружины, находящихся слева

$$nk\Delta x_{n-i} = \mu \frac{ix}{l} mg \quad (31).$$

$$nk\Delta x_2 = \mu \frac{(n-2)x}{l} mg. \quad (32)$$

$$nk\Delta x_1 = \mu \frac{(n-1)x}{l} mg. \quad (33)$$

Для $(n - 2)$ частей пружин

$$nk\Delta x_2 = \mu \frac{(n - 2)x}{l} mg \quad (32).$$

Для $(n - 1)$ частей пружин

$$nk\Delta x_1 = \mu \frac{(n - 1)x}{l} mg \quad (33).$$

Для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{\mu mg}{kn^2}. \quad (34)$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2\mu mg}{kn^2}. \quad (35)$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{i\mu mg}{kn^2}. \quad (36)$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n - 2)\mu mg}{kn^2}. \quad (38)$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n - 1)\mu mg}{kn^2}. \quad (39)$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n - 2)\mu mg}{kn^2} \quad (38).$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{i\mu mg}{kn^2} \quad (36).$$

$$\Delta x_{n-1} = \frac{\mu mg}{kn^2} \quad (34).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2\mu mg}{kn^2} \quad (35).$$

$$\Delta x_{n-1} = \frac{\mu mg}{kn^2} \quad (34).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2\mu mg}{kn^2} \quad (35).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{\mu mg(n - 1)}{2nk}. \quad (40)$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n - 1)\mu mg}{kn^2} \quad (39).$$

При $n \rightarrow \infty$, дробь
 $\Delta x = \frac{\mu mg}{2k}$ (41).

При $n \rightarrow \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\Delta x = \frac{\mu mg}{2k}. \quad (41)$$

3.2. Рассуждая аналогично п.3.1., из второго закона Ньютона для i -ой части пружины, n -ой и $(n-1)$ -ой части, i частей пружины, находящихся слева и т.д. для деформаций получим:

$$\Delta x_{n-1} = \frac{m(\mu g + a)}{kn^2}. \quad (42)$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2m(\mu g + a)}{kn^2}. \quad (43)$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{im(\mu g + a)}{kn^2}. \quad (44)$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)m(\mu g + a)}{kn^2}. \quad (45)$$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)m(\mu g + a)}{kn^2}. \quad (46)$$

$$\Delta x_2 = \frac{(n-2)m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (45).$$

$$\Delta x_{n-i} = \frac{im(\mu g + a)}{kn^2} \quad (44).$$

$$\Delta x_{n-1} = \frac{m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (42).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (43).$$

$$\Delta x_{n-1} = \frac{m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (42).$$

$$\Delta x_{n-2} = \frac{2m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (43).$$

Просуммировав деформации получим:

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)(n-1)}{2nk} \quad (47).$$

При $n \rightarrow \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$
 $\Delta x = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (48).$

$$\Delta x_1 = \frac{(n-1)m(\mu g + a)}{kn^2} \quad (46).$$

При $n \rightarrow \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$, тогда

$$\Delta x = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (48).$$

3.3. Так как по условию задачи $\Delta x = l$, то из (25) получим:

$$l = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (49).$$

При $n \rightarrow \infty$, дробь $\frac{(n-1)}{n} = 1$
 $\Delta x = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (48).$

Откуда

$$a = \frac{2kl - \mu mg}{m} \quad (50).$$

$$l = \frac{m(\mu g + a)}{2k} \quad (49),$$

Из второго закона Ньютона, записанного для всей пружины, получим:

$$F = ma + \mu mg \quad (51).$$

$$a = \frac{2kl - \mu mg}{m} \quad (50).$$

Подставляя (50) в (51), получим:

$$F = ma + \mu mg \quad (51).$$

$$F = 2kl \quad (52).$$