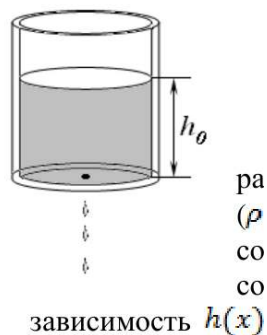
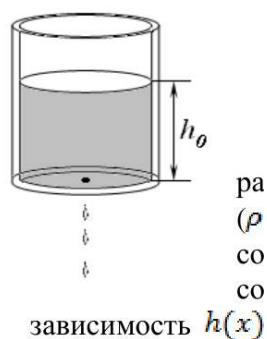


Условие



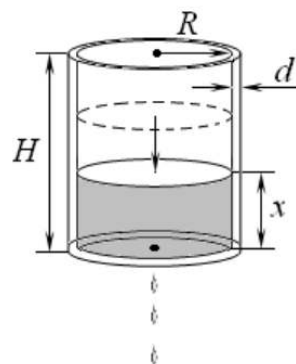
Задача 10 - 2. Утечка ... центра масс



В вертикальный тонкостенный цилиндрический сосуд радиуса $R = 5,0$ см до некоторого уровня h_0 налита вода ($\rho = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³). Из-за небольшой дырочки в центре сосуда вода начала вытекать из него, и через некоторое время сосуд оказался пуст. В процессе вытекания оказалось, что зависимость $h(x)$ высоты центра масс сосуда с водой от уровня (высоты) x воды в сосуде имеет вид, представленный на *Графике 1*. Толщина d ($d \ll R$) стенок и дна сосуда одинакова, плотность материала сосуда $\rho_1 = 3,0 \cdot 10^3$ кг/м³.

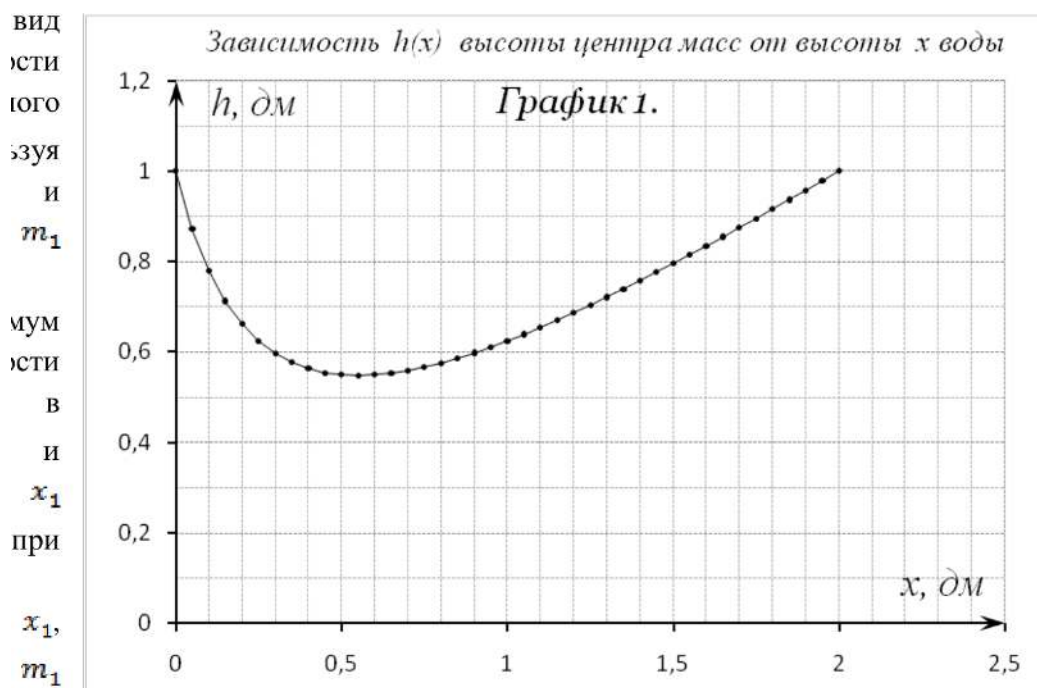
радиуса $R = 5,0$ см
($\rho = 1,0 \cdot 10^3$ кг/м³)

ий сосуд
лита вода
в центре
рое время
лось, что
ысоты) x
 d ($d \ll R$)
сосуда



Часть 1. «Сложный» график

1.4 Используя *График 1*, найдите величину h_0 начального уровня воды в сосуде, а также высоту h_1 , на которой находится центр масс пустого сосуда.



: полученные результаты для m_1 (в п.п. 1.2 и 1.4) между собой и

1.5 Получите вид функциональной зависимости $h(x)$ для рассматриваемого случая. Используя полученную зависимость и *График 1*, найдите массу m_1 сосуда без воды.

1.6 Найдите минимум функциональной зависимости $h(x)$, полученной в предыдущем пункте, и рассчитайте уровень x_1 жидкости в сосуде, при котором он достигается.

1.7 Используя значение x_1 , повторно найдите массу m_1 сосуда без воды. Сравните полученные результаты для m_1 (в п.п. 1.2 и 1.4) между собой и сделайте выводы.

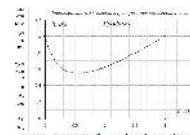
Часть 2. «Простой» сосуд

4.1 Используя ранее полученные данные, найдите и вычислите высоту H стенок сосуда.

4.2 Используя ранее полученные данные, найдите и вычислите толщину d стенок сосуда.

Часть 3. Наливаем обратно...

3.1 Взяли другой сосуд такой же массы m_1 и высоты h_1 центра масс с высокими стенками. Начали наливать в него воду так, что уровень x жидкости в нём медленно увеличивается со временем. Проанализируйте функцию $h(x)$ при больших x ($x \rightarrow \infty$). Достройте *График 1* на выданном «Бланке построений» для «больших» x в интервале $2,0 \text{ дм} \leq x \leq 5,0 \text{ дм}$.



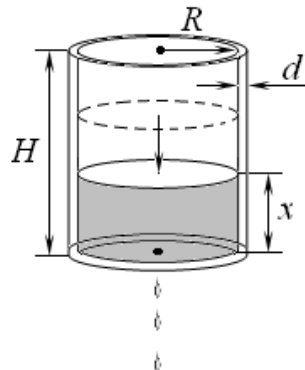
$m_1, m_2, \dots, m_n$ Подсказка: координата X_c центра масс системы материальных точек $m_1, m_2, \dots, m_n$, находящихся на оси Ox и имеющих координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответственно, находится по формуле $X_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$.

Решение

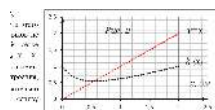
Задача 10 - 2. Утечка ... центра масс

Часть 1. «Сложный» график

1.4 Удобно решать задачу в «обратном» порядке, рассматривая медленный подъём жидкости в сосуде от нуля до некоторого уровня x . При таком подходе сразу понятно, что начальная точка ($x = 0$) *Графика 1* – это и есть искомая высота h_1 центра масс пустого сосуда, поскольку воды в сосуде ещё пока нет



$$h_1 = 10 \text{ см} = 1,0 \text{ дм.} \quad (1)$$



Далее заметим, что при максимальной высоте уровня $x = 20$ см воды в сосуде центр масс системы вновь находится на высоте h_1 от дна. Это вполне возможно, поскольку центр масс воды лежит на половине её высоты. Следовательно, искомая начальная высота

$$h_0 = 2h_1 = 20 \text{ см} = 2,0 \text{ дм.} \quad (2)$$

1.5 Если уровень воды в сосуде находится на высоте x от дна, то масса воды, находящейся в сосуде, равна

$$m_2 = \rho V = \rho Sx = \rho \pi R^2 x, \quad (3)$$

$$m_2 = \rho V = \rho Sx = \rho \pi R^2 x$$

находится на высоте $\frac{x}{2}$ от дна.

а её центр масс, соответственно, находится на высоте $\frac{x}{2}$ от дна.

Если центр масс сосуда (без воды) массой m_1 находится на известной высоте h_1 от дна, то, согласно подсказке, в данный момент времени центр масс системы будет находиться между центрами масс воды и сосуда на высоте

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + m_2 \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + \rho \pi R^2 x} = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{[2(m)_1 + \rho \pi R^2 x]}. \quad (4)$$

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + m_2 \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + \rho \pi R^2 x} = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{[2(m)_1 + \rho \pi R^2 x]}$$

Выберем несколько «удобных» точек на *Графике 1*, когда функция «на глаз» проходит через узлы координатной сетки, минимум и т.д. Это, например, точки с координатами (0,3; 0,6), (0,55; 0,55), (0,9; 0,6), (1,5; 0,8) и т.д.

Из (4) выразим искомую массу m_1 пустого сосуда через координаты $(x; h)$ выбранной точки на *Графике 1*

$$m_1 = \rho \pi R^2 \frac{2h - x}{2(h_1 - h)} x. \quad (5)$$

$$m_1 = \rho \pi R^2 \frac{2h - x}{2(h_1 - h)} x$$

найти массу m_1 сосуда

Используя (5), несложно вычислить массу m_1 сосуда без воды для каждой из выбранных нами на *Графике 1* точек. Результаты вычислений (до трёх значащих цифр, с учётом запасной цифры) занесём в таблицу

Точка	m_1 , кг
(0,3; 0,6)	0,265
(0,55; 0,55)	0,264
(0,9; 0,6)	0,265
(1,5; 0,8)	0,294

Точка	** m_1 , кг**
(0,3; 0,6)	0,265
(0,55; 0,55)	0,264
(0,9; 0,6)	0,265
(1,5; 0,8)	0,294

Как следует из таблицы, последняя точка значительно «вываливается» из численного диапазона первых трёх точек. Такие точки называются «промахами» и могут быть опущены при дальнейших расчётах. Если уж совсем внимательно присмотреться, то можно заметить, что эта «проблемная» точка (1,5; 0,8) действительно лежит несколько ниже узла координатной сетки.

Усредняя первые три результата, и округляя вычисление до двух значащих цифр (как в условии), получаем окончательный ответ

$$m_1 = 0,2647 \text{ кг} \approx 0,26 \text{ кг} \quad (6)$$

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + m_2 \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 h_1 + \rho \pi R^2 x \left(\frac{x}{2}\right)}{m_1 + \rho \pi R^2 x} = \frac{2m_2 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{2(m_1 + \rho \pi R^2 x)}$$

Для удобства анализа полученной функции и вычислений m_1 введём безразмерные переменные для высоты центра масс системы $h^* = \frac{h}{h_1}$ и высоты жидкости в сосуде $x^* = \frac{x}{h_1}$ (т.е. будем измерять их в величинах « h_1 »). Тогда зависимость (4) можно переписать в виде

$$h^*(x^*) = \frac{2 + A \cdot (x^*)^2}{2(1 + A \cdot x^*)}, \quad (7)$$

$$h^*(x^*) = \frac{2 + A \cdot (x^*)^2}{2(1 + A \cdot x^*)} =$$

где остался единственный безразмерный параметр зависимости

$$A = \frac{\rho S h_1}{m_1} = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1}. \quad (8)$$

Точка	m_1 , кг
(0,3; 0,8)	0,265
(0,55; 0,55)	0,264
(0,9; 0,6)	0,266
(1,5; 0,8)	0,294

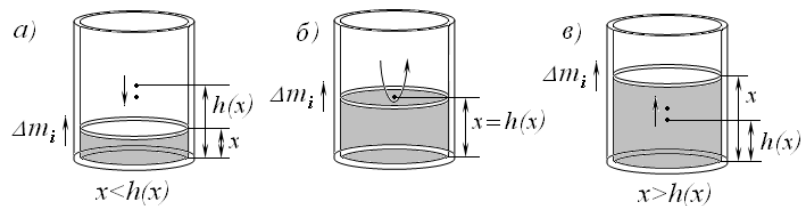
По данным таблицы в нашем случае значение параметра

$$A = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} = 3,02. \quad (9)$$

$$A = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} = 3,02$$

значения $x = 0$ и $h(x) = h_1$

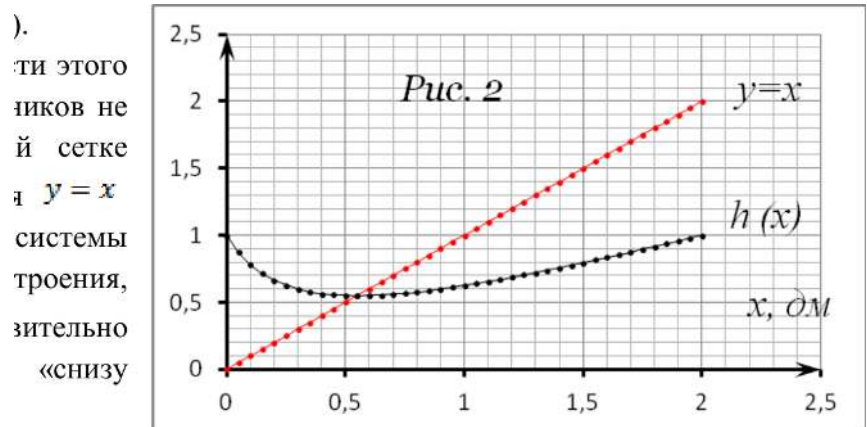
Интересно, что если подставить в (4) значения $x = 0$ и $h(x) = h_1$, то мы придём к значениям (1) и (2).



1.6 Для нахождения минимума функции (4) (или (7)) заметим, что при повышении уровня воды в сосуде на начальном этапе ($x < h(x)$) каждый следующий небольшой слой воды массой Δm_i (Рис. 1, а) немного понижает положение центра масс системы, поскольку он находится ниже его.

Так будет продолжаться до тех пор, пока уровень жидкости x не достигнет высоты $x = h(x)$ центра масс системы (Рис. 1, б). Далее ($x > h(x)$) уже каждый следующий слой воды будет приподнимать положение центра масс системы (Рис. 1, в).

Следовательно, при прохождении минимума функции $h(x)$ на Графике 1 уровень воды x_1 должен совпадать с центром масс системы (ордината графика равна его абсциссе).



Для подтверждения справедливости этого вывода удобно построить (от школьников не требуется!) на одной координатной сетке (Рис. 2) графики зависимостей уровня $y = x$ воды в сосуде и высоты центра масс системы $h(x)$ от дна сосуда. Как следует из построения, график зависимости $y = x$ действительно пересекает график зависимости $h(x)$ «снизу вверх» в точке минимума.

Согласно (4) при этом можем записать

$$h(x) = x_1 = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x_1^2}{[2(m)]_1 + \rho \pi R^2 x_1}, \quad (10)$$

$$h(x) = x_1 = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x_1^2}{[2(m)]_1 + \rho \pi R^2 x_1},$$

уравнение относительно x_1

$$\rho \pi R^2 x_1^2 + 2m_1 x_1 - 2m_1 h_1 = 0$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно x_1

$$\rho \pi R^2 x_1^2 + 2m_1 x_1 - 2m_1 h_1 = 0. \quad (11)$$

Отбрасывая отрицательный корень, как не имеющий физического смысла, получаем искомое значение

$$x_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1\rho\pi R^2 h_1} - m_1}{\rho\pi R^2}. \quad (12)$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1\rho\pi R^2 h_1} - m_1}{\rho\pi R^2}.$$

Подчеркнём, что для нахождения минимума функции (4) (или (7)) можно также использовать и традиционный подход: вычислить производную и приравнять её к нулю. Убедитесь самостоятельно, что при этом Вы получите уравнение (11), и в итоге – такой же результат (12).

Интересно, что согласно полученным данным устойчивость сосуда с водой, которая определяется высотой центра масс, по мере вытекания воды сначала увеличивается, а потом уменьшается. Данный эффект можно наблюдать на тубах с зубной пастой, которые по мере расхода пасты, бывает сложно поставить вертикально.

1.7 Находя из *Графика 1* абсциссу минимума функции $x_1 = 0,55$ дм, выразим из (12) массу m_1 сосуда вторым способом

$$m_1 = \frac{\rho\pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = 0,2638 \text{ кг} \approx 0,26 \text{ кг}. \quad (13)$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1\rho\pi R^2 h_1} - m_1}{\rho\pi R^2}$$

Для сравнения этого метода определения массы с методом из предыдущего пункта, находим относительную погрешность определения массы сосуда

$$\varepsilon = \frac{\Delta m_1}{m_1} = 0,3\%, \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta m_1}{m_1} = 0,3\%$$

что является отличным результатом для обработки графика «народным» методом «на глаз».

После завершения всех расчётов данной части задачи можно признаться (☺), что построение *Графика 1* проводилось при значении безразмерного параметра

$$A = \frac{\rho\pi R^2 h_1}{m_1} = 3,00. \quad (15)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta m_1}{m_1}$$

Приятно, что мы с хорошей точностью смогли вычислить этот параметр (см. (9)), обрабатывая представленный в условии график.

Часть 2. «Простой» сосуд

2.1 Поскольку стенки и дно сосуда имеют одинаковую толщину d ($d \ll R$), то массу m_3 дна сосуда выразим как

$$m_3 = \rho_1 V = \rho_1 S_3 d = \rho_1 d \pi R^2, \quad (16)$$

$$A = \frac{\rho \pi R^2 h_1}{m_1} = 3,00$$

где $S_3 = \pi R^2$ – площадь дна сосуда. Соответственно, массу стенок найдем как

$$m_4 = \rho_1 d S_4 = \rho_1 d 2\pi R H, \quad (17)$$

$$m_3 = \rho_1 V = \rho_1 S_3 d = \rho_1 d \pi R^2$$

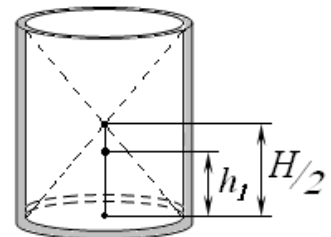
где H – искомая высота сосуда.

Так как центр масс сосуда без воды (Рис. 3) находится на высоте h_1 от дна (см. (1)), то справедливо равенство (толщиной дна здесь пренебрегаем)

$$h_1 = \frac{m_3 \cdot 0 + m_4 \left(\frac{H}{2}\right)}{m_3 + m_4} = \frac{\rho_1 d 2\pi R H \left(\frac{H}{2}\right)}{\rho_1 d \pi R^2 + \rho_1 d 2\pi R H} = \frac{H^2}{R + 2H}. \quad (18)$$

Из (18) находим

$$h_1 = \frac{m_3 \cdot 0 + m_4 \left(\frac{H}{2}\right)}{m_3 + m_4} = \frac{\rho_1 d 2\pi R H \left(\frac{H}{2}\right)}{\rho_1 d \pi R^2 + \rho_1 d 2\pi R H} = \frac{H^2}{R + 2H}$$



$$H^2 - 2h_1 H - h_1 R = 0 \quad (19)$$

$$h_1 = \frac{m_3 + 0 + m_4 \left(\frac{H}{2}\right)}{m_3 + m_4} = \frac{\rho_1 d 2\pi R H \left(\frac{H}{2}\right)}{\rho_1 d \pi R^2 + \rho_1 d 2\pi R H} = \frac{H^2}{R + 2H}$$

$$H = h_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R}{h_1}} \right) = 22 \text{ см}$$

Откуда

$$H = h_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{R}{h_1}} \right) = 22 \text{ см.} \quad (20)$$

2.2 Для определения толщины стенок сосуда воспользуемся тем, что мы уже вычислили его массу (см. (13)), тогда

$$m_1 = \frac{\rho \pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = m_2 + m_4 = \rho_2 d \pi R^2 + \rho_2 d 2\pi R H = \rho_2 d \pi R(R + 2H), \quad (21)$$

$$m_1 = \frac{\rho \pi R^2}{2(h_1 - x_1)} x_1^2 = m_2 + m_4 = \rho_2 d \pi R^2 + \rho_2 d 2\pi R H = \rho_2 d \pi R(R + 2H)$$

откуда находим

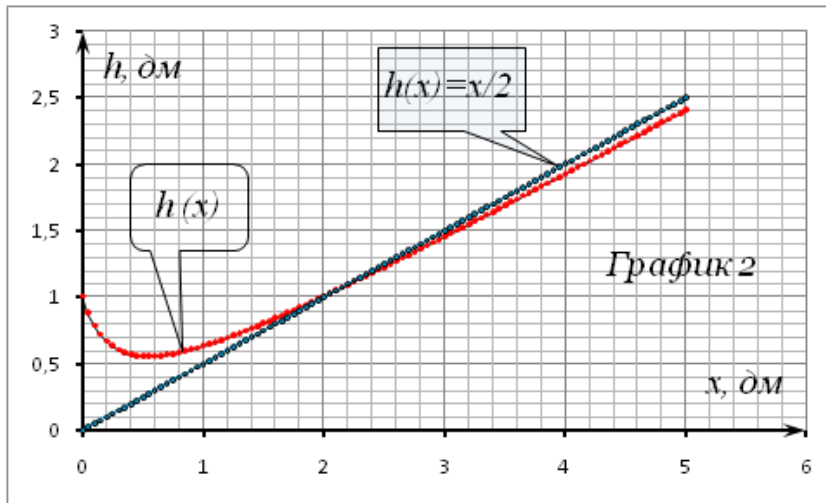
$$d = \frac{m_1}{\rho_2 \pi R(R + 2H)} = 2,1 \text{ мм.} \quad (22)$$

$$d = \frac{m_1}{\rho_2 \pi R(R + 2H)} = 2,1 \text{ мм}$$

Часть 3. Наливаем обратно ...

$$m_2 = \rho V = \rho \pi R^2 x$$

3.1 Для решения данного пункта достаточно заметить, что при больших x ($x \rightarrow \infty$) масса $m_2 = \rho V = \rho \pi R^2 x$ воды в сосуде будет значительно превышать массу самого сосуда. Это значит, что положение центра масс системы практически будет совпадать с положением центра масс столба воды, т.е. находиться на половине его высоты.



Иными словами, в данном интервале функция будет стремиться к зависимости

$$h(x) \approx \frac{x}{2}, \quad (23)$$

оставаясь немного ниже ее, т.к. масса сосуда всё же отлична от нуля. На всякий случай, используя ((4) или (7)) можно просчитать несколько точек, чтобы убедиться в справедливости приближения (23)

$x, \text{ дм}$	$h(x) = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{2(m_1 + \rho \pi R^2 x)}$	$h(x) = \frac{x}{2}$	$\varepsilon, (\%)$
2,0	1,00	1,00	0,0
2,5	1,22	1,25	2,4
3,0	1,45	1,50	3,3
3,5	1,68	1,75	4,0
4,0	1,92	2,00	4,0
4,5	2,16	2,25	4,0
5,0	2,41	2,50	3,6

$$h(x) = \frac{2m_1 h_1 + \rho \pi R^2 x^2}{2(m_1 + \rho \pi R^2 x)}$$

Как следует из таблицы, эти графики на указанном интервале с приемлемой точностью «совпадают» друг с другом. На Графике 2 (на всякий случай!) приведено точное построение (от школьников не требуется), из которого видно, что в данной части задачи действительно вполне достаточно догадаться пренебречь массой сосуда и записать (и построить!) функцию $h(x) \approx \frac{x}{2}$ (можно несколько «ниже» точного значения).