

Условие

Задание 3. Бареттер.

$$r = 5,00 \cdot 10^{-5}$$



В данной задаче вам предстоит рассмотреть модель *бареттера* — электронного устройства, используемого для стабилизации тока. Рассматриваемый бареттер представляет собой заполненный водородом стеклянный баллон, внутрь которого помещена тонкая железная проволока радиуса $r = 5,00 \cdot 10^{-5}$ м и длины $l = 2,00 \cdot 10^{-1}$ м. Водород обладает достаточной теплопроводностью, чтобы отводить теплоту, выделяющуюся при прохождении тока по проволоке, к стенкам баллона и затем в окружающую среду. Температура водорода у стенок баллона постоянна и равна $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Количество теплоты, которое передается с единицы площади поверхности проволоки в единицу времени, определяется законом Ньютона-Рихмана



$$q = \alpha(t - t_0), \quad (1)$$

где α — коэффициент теплоотдачи, t — температура поверхности проволоки, t_0 — температура стенок баллона, которая в нашем случае всегда равна нулю, поэтому можно использовать выражение $q = \alpha t$.

Удельное электрическое сопротивление металлов возрастает при увеличении температуры t по закону

$$\rho = \rho_0(1 + \gamma t), \quad (2)$$

$$l = 2,00 \cdot 10^{-1}$$

где ρ_0 — удельное сопротивление металла при температуре 0°C , γ — температурный коэффициент сопротивления.

Этот закон является приближенным, справедливым в небольшом диапазоне температур. В реальности удельное сопротивление зависит от температуры более сложным образом. В Частях 1 и 2 задачи используйте приближенный закон (2), в Части 3 используйте приведенный там график зависимости реальной зависимости.

Вам понадобятся следующие характеристики железа:

$$\rho = \rho_0(1 + \gamma t)$$

- 1) удельное сопротивление при 0°C — $\rho_0 = 8,57 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$;
- 2) температурный коэффициент сопротивления $\gamma = 6,06 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$;

$$\text{чи } \alpha = 50,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$$
$$t_{\text{пл}} = 1538^{\circ}\text{C}.$$

- 3) коэффициент теплоотдачи $\alpha = 50,0 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$;
- 4) температура плавления $t_{\text{пл}} = 1538^{\circ}\text{C}$.

*При решении данной задачи рекомендуется выполнять промежуточные численные расчеты некоторых параметров и использовать их в дальнейшем.

В задаче рассматривается стационарный режим работы бареттера, после установления теплового равновесия, поэтому рассчитывать временные характеристики процессов не требуется!*

Введение. Характеристики бареттера.

0.1. Рассчитайте значение сопротивления проволоки бареттера R_0 при температуре 0°C . Запишите формулу зависимости сопротивления проволоки от температуры.

0.2. Покажите, что мощность теплоотдачи бареттера определяется формулой $P_{\text{отд.}} = At$, рассчитайте значение коэффициента A .

Часть 1. Вольтамперная характеристика идеального бареттера

1.1. Получите зависимость температуры проволоки t от силы тока I через неё. Постройте схематический график этой зависимости.

1.2. Постройте вольтамперную характеристику (график зависимости силы тока I через проволоку от приложенного к ней напряжения U) рассматриваемого бареттера.

Этот график постройте на выданном вам бланке №1.

Подсказка. Выберите, какую зависимость легче анализировать: $I(U)$ или $U(I)$.

1.3. Найдите силу тока через бареттер и температуру проволоки при $U \rightarrow \infty$.

1.4. Найдите максимальное напряжение U_{max} , при котором может работать данный бареттер.

1.5. Покажите, что при малых напряжениях сила тока пропорциональна приложенному напряжению, определите коэффициент пропорциональности этой зависимости.

Часть 2. Вольтамперные характеристики цепей с бареттером.

2.1. Постройте вольтамперную характеристику цепи, состоящей из бареттера с подключенным к нему параллельно резистором с сопротивлением $R_1 = 10 \text{ Ом}$.

2.2. Постройте вольтамперную характеристику цепи, состоящей из бареттера с подключенным к нему последовательно резистором с сопротивлением $R_1 = 10 \text{ Ом}$.

Эти графики так же постройте на Бланке №1.

Часть 3. Реальный бареттер

Реальный бареттер, в отличие от рассмотренной в данной задаче модели, не может стабилизировать ток при сколь угодно большом напряжении. Это объясняется тем, что при достаточно больших температурах зависимость сопротивления от температуры перестаёт быть линейной. Реальная зависимость $\rho(t)$ для железа приведена на бланке №2 (пунктиром показана использованная ранее приближенная зависимость).

Для удобства на том же бланке приведена таблица зависимости удельного сопротивления железа от температуры. В этой таблице есть свободные столбцы, в которых Вы можете привести результаты необходимых расчетов.

3.1. Используя приведенную реальную зависимость $\rho(t)$, постройте вольт амперную характеристику реального бареттера.

Построение проведите на Бланке №3.

3.2. Укажите на графике (и запишите численные значения в тетради) напряжение стабилизации $\bar{U}_{\text{ст}}$, при котором изменение силы тока ΔI минимально при изменении напряжения ΔU .

3.3. Укажите диапазон напряжений $[U_{\text{ст.мин}}, U_{\text{ст.макс}}]$ в котором бареттер стабилизирует силу тока в цепи. Необходимо, что бы в этом диапазоне сила тока изменялась не более, чем на 2,5%.

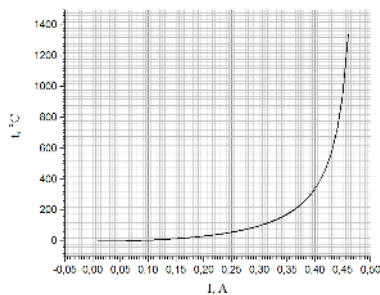
Не забудьте сдать выданные Вам бланки!

Решение

Задание 3. Бареттер.

0.1. Сопротивление проволоки бареттера R_0 при температуре 0°C равно

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{S} = \frac{\rho_0 l}{\pi r^2} = 2,18 \text{ Ом}.$$



Формула зависимости сопротивления проволоки от температуры имеет вид

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho_0 l}{\pi r^2} (1 + \gamma t) = R_0 (1 + \gamma t).$$

$$\rho(t) I^2 \frac{\rho(t)}{\rho_0} R_0 = At$$

$$U(t) = \sqrt{\frac{\rho(t) R_0 At}{\rho_0}}$$

что

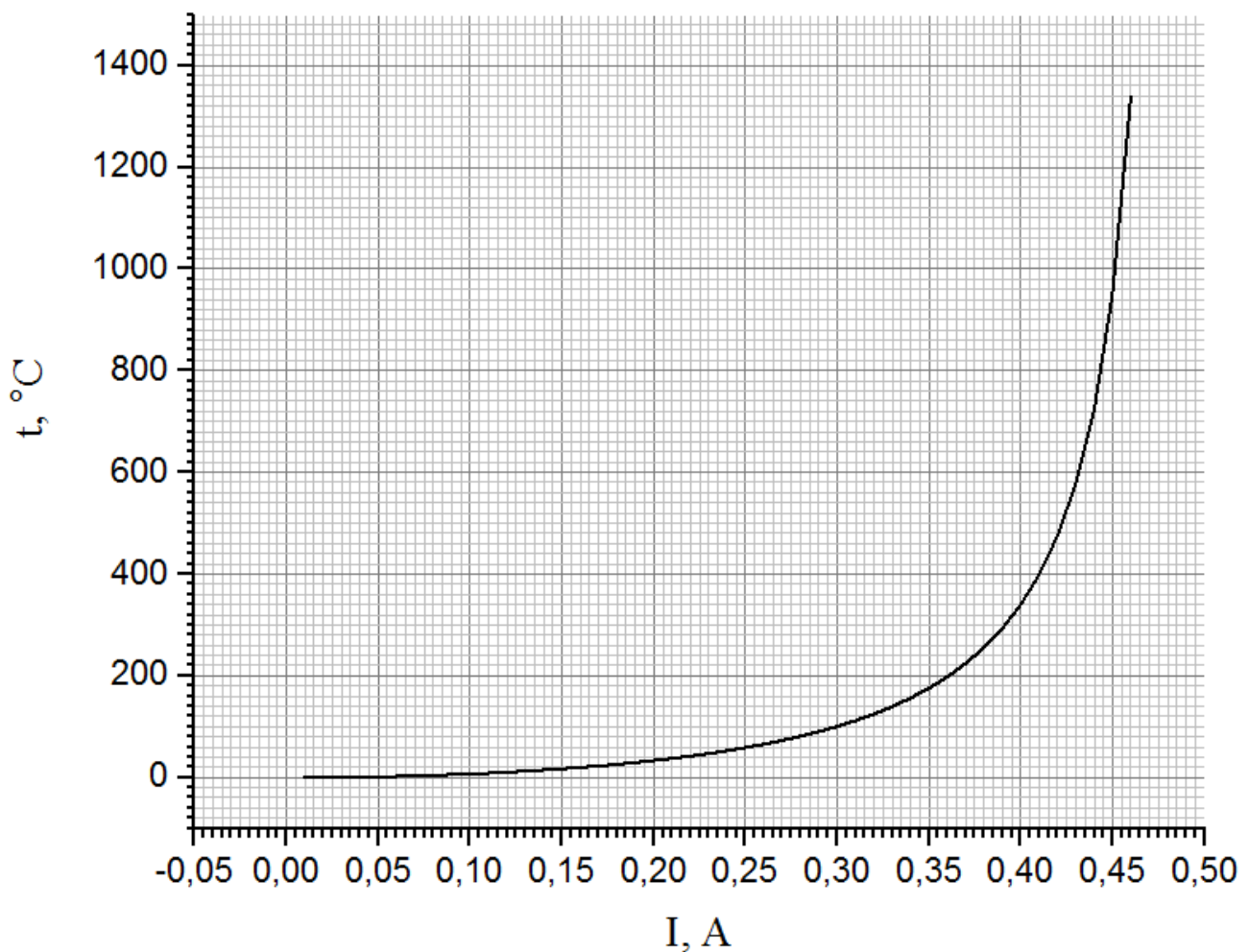
0.2. Мощность теплоотдачи бареттера определяется формулой $P_{\text{орж}} = \alpha S_{\text{nos}}(t - t_0)$, где $S_{\text{nos}} = 2\pi r l$ — площадь поверхности нити. Учитывая, что $t_0 = 0$, получаем, что $P_{\text{орж}} = At$, где $A = 2\pi r l \alpha = 3,14 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$.

1.1. При протекании тока I по проволоке бареттера в ней выделяется теплота с мощностью, определяемой законом Джоуля-Ленца. В тепловом равновесии выполняется условие $P_{3\pi} = P_{\text{орж}}$ или $I^2 R_0 (1 + \gamma t) = At$. Отсюда для зависимости $t(I)$ получаем следующее выражение

$$I^2 R_0 (1 + \gamma t) = At$$

$$t = \frac{I^2 R_0}{A - I^2 R_0 \gamma}.$$

$$t = \frac{I^2 R_0}{A - I^2 R_0 \gamma}.$$



1.2. Согласно закону Ома напряжение на проволоке

$$U = IR = IR_0(1 + \gamma t) = IR_0 \left(1 + \frac{I^2 R_0 \gamma}{A - I^2 R_0 \gamma} \right) = \frac{IR_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2}.$$

$$U = IR = IR_0(1 + \gamma t) = IR_0 \left(1 + \frac{I^2 R_0 \gamma}{A - I^2 R_0 \gamma} \right) = \frac{IR_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2}$$

зависимость $I(U)$ можно разрешить полученное здесь !

Чтобы получить отсюда зависимость $I(U)$ можно разрешить полученное здесь квадратное уравнение, однако этого не требуется: чтобы построить вольтамперную характеристику, можно сначала построить зависимость $U(I)$, а затем обратить полученный график.

$$U = IR = IR_0(1 + \gamma t) = IR_0 \left(1 + \frac{I^2 R_0 \gamma}{A - I^2 R_0 \gamma} \right) = \frac{IR_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2}$$

зависимость $I(U)$ можно разрешить полученное здесь

1.3. $U \rightarrow \infty$, когда $1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2 \rightarrow 0$, то есть когда $I \rightarrow \sqrt{\frac{A}{R_0 \gamma}} = 0,487 \text{ А}$. Однако такой ток через бареттер недостижим, так как из (5) следует, что при $I \rightarrow \sqrt{\frac{A}{R_0 \gamma}} \quad t \rightarrow \infty$.

$$I \rightarrow \sqrt{\frac{A}{R_0 \gamma}} = 0,487 \text{ А} \quad . \text{ Однако та}$$

$$\text{едует, что при } I \rightarrow \sqrt{\frac{A}{R_0 \gamma}} \quad t \rightarrow \infty$$

1.4. Максимально возможным током через бареттер является ток, при котором начинает плавиться проволока бареттера. Отсюда получаем для I_{max} уравнение $\frac{I^2 R_0}{A - I^2 R_0 \gamma} = t_{пл}$. Разрешая его, получаем, что $I_{max} = \sqrt{\frac{A}{R_0} \frac{t_{пл}}{1 + \gamma t_{пл}}} = 0,463$

А. Тогда $U_{max} = I_{max} R_0 (1 + \gamma t) = \sqrt{A R_0 t_{пл}} (1 + \gamma t_{пл}) = 10,4 \text{ В}$.

1.5. При $U \rightarrow 0$ также и $I \rightarrow 0$, а значит $I^2 \approx 0$. Следовательно, как и следовало ожидать, $U = I R_0$ при малых напряжениях.

2.1. При параллельном подключении бареттера и резистора напряжение в цепи равно напряжению на бареттере, а полный ток в цепи определяется как сумма тока через

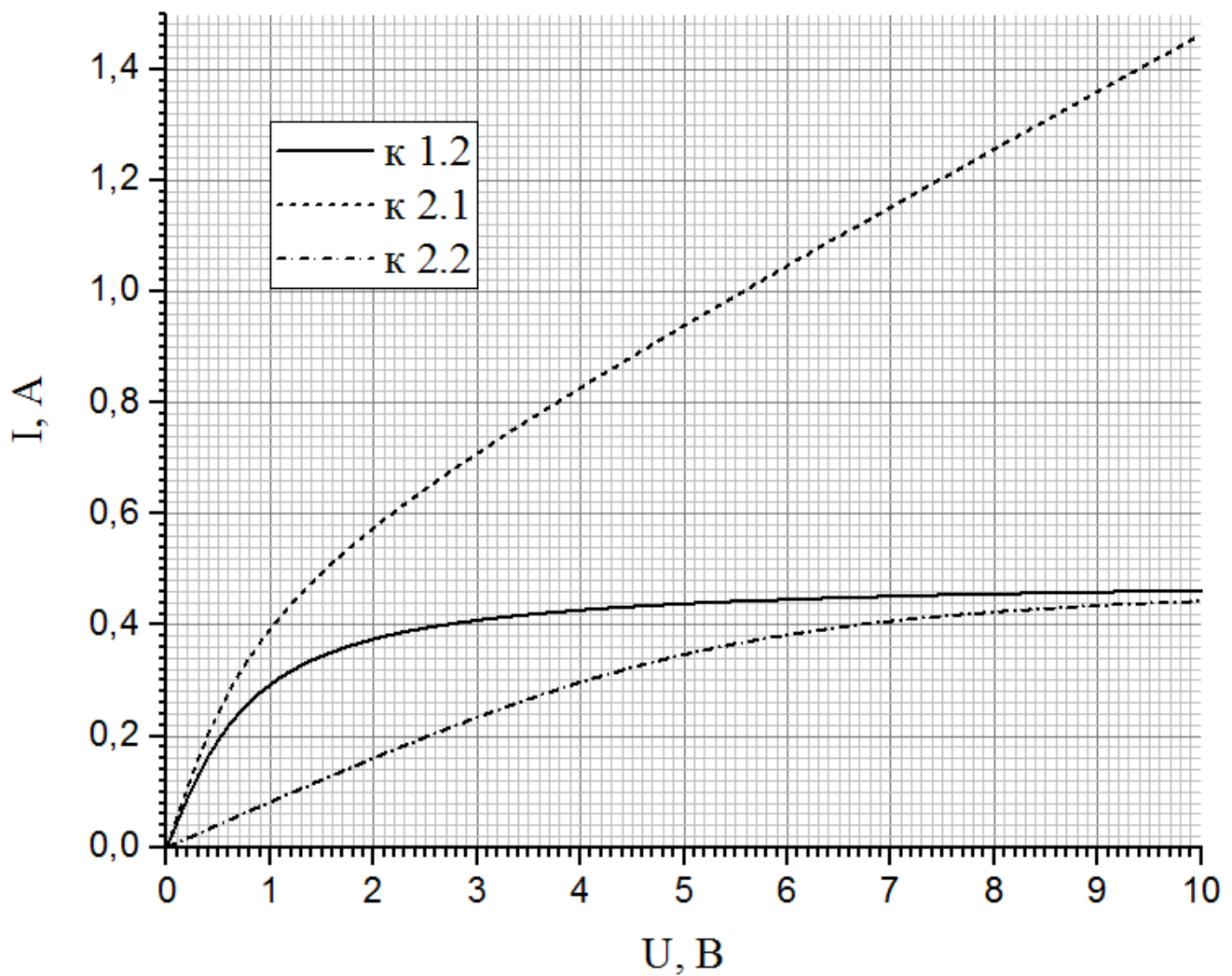
бареттер и тока через резистор, равного $\frac{U}{R_1}$. Соответственно вольтамперная характеристика цепи может быть получена прибавлением к вольтамперной характеристике бареттера линейной функции $I = \frac{U}{R_1}$.

$$U = \frac{I R_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2} + I R_1$$

2.2. При последовательном подключении бареттера и резистора ток в цепи равно току на бареттере, а напряжение в цепи определяется как $U = \frac{I R_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2} + I R_1$. Чтобы получить зависимость $I(U)$, необходимо соответственно решить кубическое уравнение, однако этого не требуется: чтобы построить вольтамперную характеристику, можно сперва построить зависимость $U(I)$, а затем обратить полученный график.

$$\rho(t) I^2 \frac{\rho(t)}{\rho_0} R_0 = A t \quad . \quad C$$

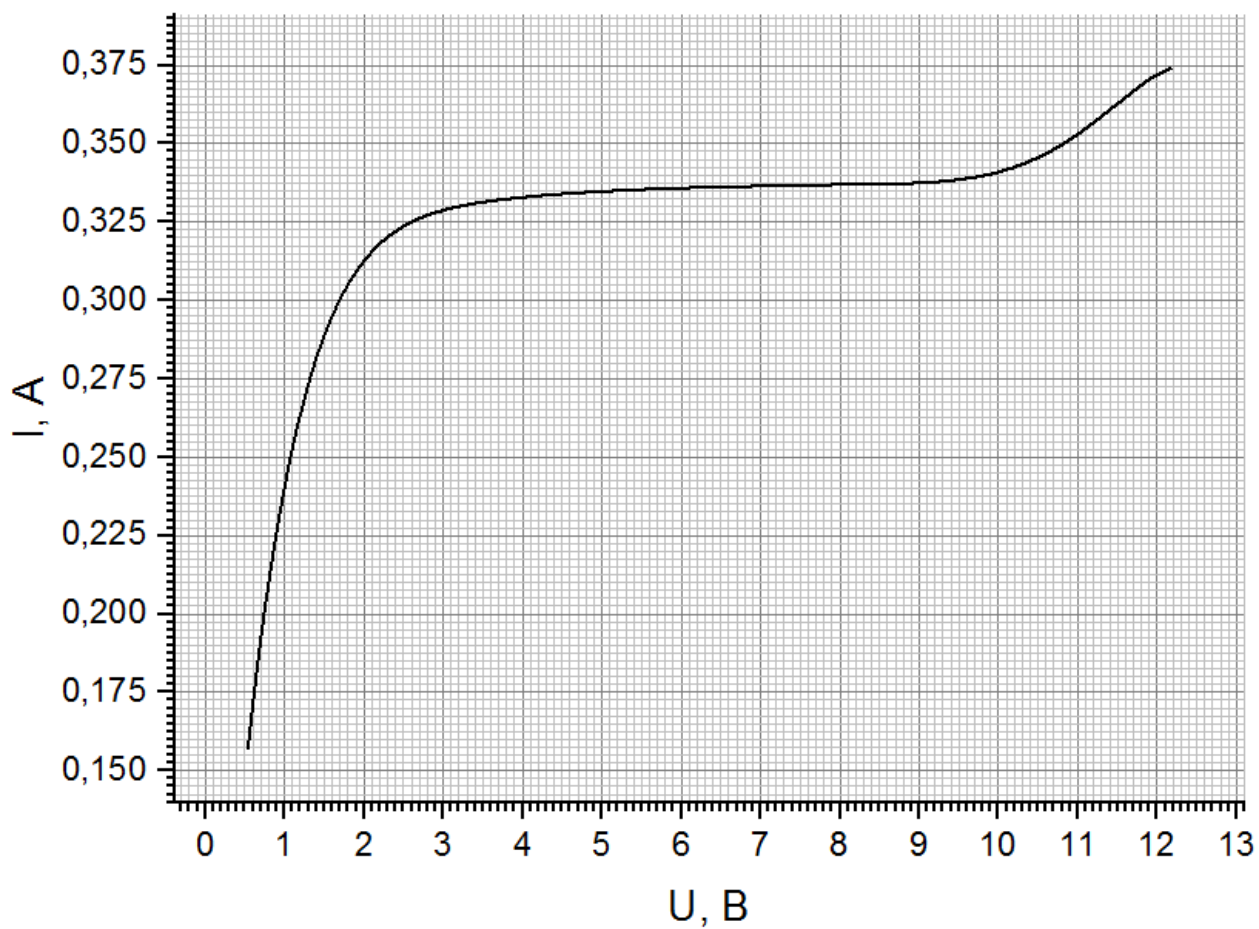
$$\text{что } U(t) = \sqrt{\frac{\rho(t) R_0 A t}{\rho_0}}$$



3.1. Для произвольной зависимости $\rho(t)$ $I^2 \frac{\rho(t)}{\rho_0} R_0 = At$. Отсюда $I(t) = \sqrt{\frac{\rho_0 At}{\rho(t) R_0}}$.

Кроме того, из закона Ома следует, что $U(t) = \sqrt{\frac{\rho(t) R_0 At}{\rho_0}}$. Таким образом, получена параметрическая зависимость $I(U)$ с температурой в качестве параметра.

$$I(t) = \sqrt{\frac{\rho_0 At}{\rho(t) R_0}}$$



3.2. Напряжение стабилизации составляет около $U_{\text{ст}} = 7,5$ В. 3.3. В точке стабилизации ток равен $I_{\text{ст}} = 0,337$ А. Соответственно области стабилизации соответствуют токи от 0,329 А до 0,345 А и напряжения от 3,0 до 10,5 В.