

Низкотемпературный тепловой контакт

Условие

Задание 1. Разминка.

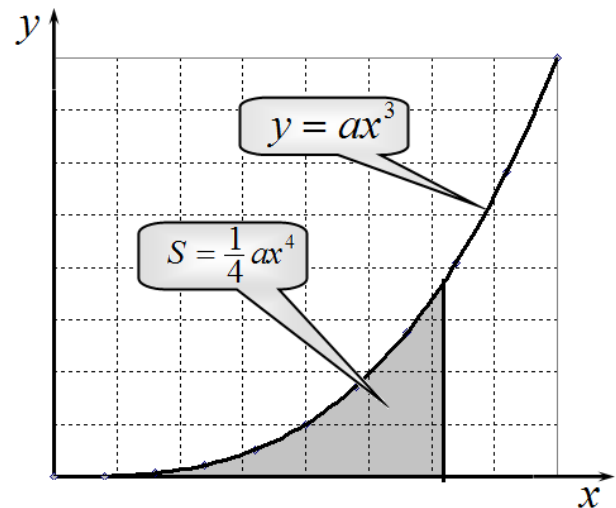
Это задание состоит из 3 не связанных между собой задач.

Задача 1.1 «Низкотемпературный тепловой контакт»

Теплоемкости веществ могут зависеть от температуры. Так при температурах, близких к абсолютному нулю удельная теплоемкость металлов пропорциональна третьей степени абсолютной температуры

$$c = \alpha T^3. \quad (1)$$

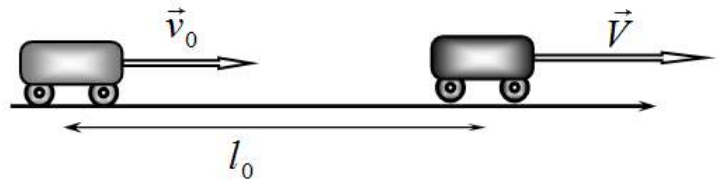
Два одинаковых металлических бруска, находящихся при низких температурах $T_1 = 1,0^\circ K$ и $T_2 = 3,0^\circ K$, приводят в тепловой контакт. Пренебрегая потерями теплоты в окружающую среду, найдите температуру брусков T_x после установления теплового равновесия.



Подсказки. 1. Абсолютная шкала температур (шкала Кельвина) сдвинута «вниз» относительно шкалы Цельсия на $-273,15^\circ$, а величина градуса Кельвина совпадает с величиной градуса Цельсия. (Для решения задачи это не существенно). 2. Если функция, определяется формулой $y = ax^3$, то площадь под графиком этой функции в интервале от 0 до некоторого значения x , рассчитывается по формуле $S = \frac{1}{4} ax^4$. (Эта формула может понадобится при решении задачи).

Задача 1.2 «Локатор»

Милицейский автомобиль преследует нарушителя на длинной прямой дороге. Скорость милицейского автомобиля равна v_0 , скорость автомобиля нарушителя равна V . Для измерения скорости автомобиля нарушителя на машине инспектора установлен локатор, который посылает короткие электромагнитные импульсы (сигналы) с фиксированным интервалом времени τ . Затем он регистрирует отраженные от машины нарушителя импульсы. Определите время τ' между приходами двух последовательных отраженных импульсов, регистрируемых локатором. Скорость распространения электромагнитных импульсов равна c и значительно больше скоростей автомобилей. Найдите зависимость времени между регистрируемыми импульсами τ' от скоростей автомобилей. Получите точную формулу, а затем упростите ее, считая, что $c \gg V, v_0$.



Задача 1.3 « Φ – сопротивление»

Сидя дома, юный электротехник Федя, увлечённый Физикой, собрал электрическую схему из одинаковых резисторов R в виде заглавной буквы Φ (рис.1). Когда он подключил схему в точках A и B к источнику напряжения $U = 13$ В, то тепловая мощность, выделяемая в цепи, при таком подключении оказалась равной $P_{AB} = 6,5$ Вт.

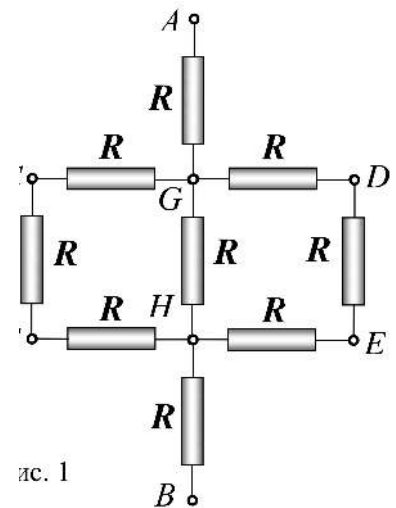


рис. 1

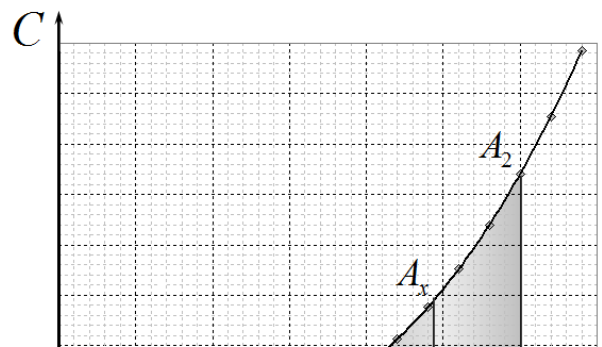
1. Определите значение сопротивления R каждого из резисторов, которые использовал Федя.
2. Найдите мощность P_{CD} схемы при подключении того же источника напряжения между точками C и D цепи.
3. Подключим одновременно к клеммам $A - B$ и $C - D$ схемы Феде два одинаковых источника напряжения по $U = 13$ В каждый. Можно ли утверждать, что в этом случае тепловая мощность P_{AB+CD} , выделяемая в схеме, будет равна сумме мощностей P_{AB} и P_{CD} представленных ранее в условии задачи?

Решение

Задание 1. Разминка.

Задача 1.1 «Низкотемпературный тепловой контакт»

1.1 Для решения задачи следует сообразить, что площадь под графиком зависимости теплоемкости от температуры $C(T)$ численно равна количеству переданной теплоты. Изобразим схематически график зависимости теплоемкости брусков от температуры. Отметим



на нем начальные температуры T_1, T_2 , а также искомую температуру теплового равновесия T_x . Так как тепловые потери отсутствуют, то количество теплоты, отданное вторым (более «горячим») бруском, равно количеству теплоты, полученным первым бруском. Графически это означает, что площади криволинейных трапеций под графиком зависимости $C(T)$ в интервалах $[T_x, T_2]$ и $[T_1, T_x]$ должны быть равны:

$$S_{1x} = S_{x2}. \quad (1)$$

Эти площади могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} S_{1x} &= S_{0x} - S_{01} = \frac{1}{4}\alpha T_x^4 - \frac{1}{4}\alpha T_1^4 \\ S_{2x} &= S_{02} - S_{0x} = \frac{1}{4}\alpha T_2^4 - \frac{1}{4}\alpha T_x^4 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь S_{01} площадь под графиком в интервале от нуля до T_1 , которая согласно приведенной в условии подсказке равна $S_{01} = \frac{1}{4}\alpha T_1^4$. Остальные площади, входящие в формулы (2) определяются аналогично. Из приведенных формул следует, что

$$\frac{1}{4}\alpha T_x^4 - \frac{1}{4}\alpha T_1^4 = \frac{1}{4}\alpha T_2^4 - \frac{1}{4}\alpha T_x^4 \Rightarrow T_x = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}} = 2,5^\circ K. \quad (3)$$

Задача 1.2. «Локатор»

Проще и нагляднее решить данную задачу, построив схематический график законов движения машин и сигналов. Эти законы движения имеют вид: - машины инспектора (считаем, что первый сигнал послан в момент времени $t = 0$):

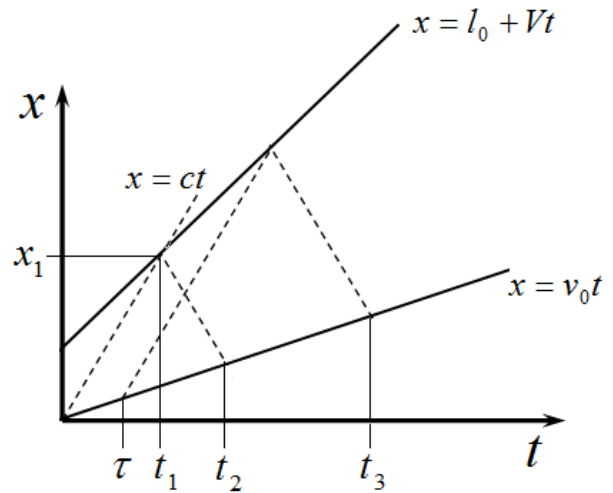
$$x = v_0 t ; \quad (1)$$

- машины нарушителя (считаем, что начальное расстояние между машинами равно l_0):

$$x = l_0 + V t ; \quad (2)$$

- первого сигнала

$$x = ct . \quad (3)$$



Сигнал догонит машину нарушителя в момент времени t_1 , удовлетворяющий уравнению

$$l_0 + Vt_1 = ct_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{l_0}{c - V} . \quad (4)$$

в точке с координатой

$$x_1 = ct_1 = \frac{c}{c - V} l_0 \quad (5)$$

Закон движения отраженного сигнала записывается в виде

$$x = x_1 - c(t - t_1) = 2x_1 - ct = 2\frac{c}{c - V} l_0 - ct . \quad (6)$$

Этот отраженный сигнал встретится с машиной ГАИ в момент времени t_2 , удовлетворяющей условию

$$2\frac{c}{c - V} l_0 - ct_2 = v_0 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 2\frac{c}{(c - V)(c + v_0)} l_0 . \quad (7)$$

Второй сигнал послан в момент времени τ , когда расстояние между автомобилями стало равным $(l_0 + (V - v_0)\tau)$, поэтому он вернется к машине ГАИ в момент времени t_3 , который может быть найден с помощью формулы (7):

$$t_3 = \tau + 2\frac{c}{(c - V)(c + v_0)} (l_0 + (V - v_0)\tau) = \tau + t_2 + 2\frac{c(V - v_0)}{(c - V)(c + v_0)} \tau . \quad (8)$$

Таким образом, время между возвращения двух последовательных импульсов равно

$$\tau' = t_3 - t_2 = \tau + 2\frac{c(V - v_0)}{(c - V)(c + v_0)} \tau . \quad (9)$$

Учитывая, что скорость сигнала значительно больше скорости автомобилей, формула (9) упрощается до

$$\tau' \approx \tau + 2\frac{(V - v_0)}{c} \tau . \quad (10)$$

Задача 1.3. « Φ – сопротивление»

1. Рассмотрим цепь Фёдора при подключении источника напряжения в точках A и B цепи (рис. 2). Полное сопротивление цепи при этом найдем из равенства

$$R_{AB} = R + R_{GH} + R. \quad (1)$$

Сопротивление участка цепи R_{GH} между точками G и H найдем из условия параллельного соединения проводников

$$\frac{1}{R_{GH}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} = \frac{5}{3R} \Rightarrow R_{GH} = \frac{3}{5}R. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), находим полное сопротивление R_{AB} цепи в этом случае и мощность P_{AB} , выделяемую схемой в данном случае

$$R_{AB} = 2R + \frac{3}{5}R = \frac{13}{5}R, \quad (3)$$

$$P_{AB} = \frac{U^2}{R_{AB}} = \frac{5U^2}{13R}. \quad (4)$$

Из (4) находим номинал сопротивления, которое использовал Федя

$$R = \frac{5U^2}{13P_{AB}} = 10 \text{ Ом}. \quad (5)$$

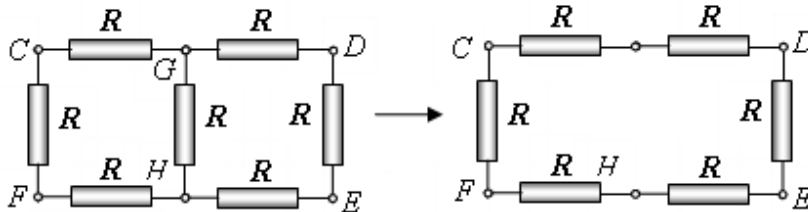


Рис. 3

2. При подключении цепи в точках C и D сопротивления AG и BH (см. рис. 2) оказываются «бесполезными», поскольку ток по ним не идёт. После их удаления схема для расчёта сопротивления упрощается и принимает вид, как на рисунке 3. Кроме того, сопротивление GH в этом случае также можно отбросить, поскольку оно подключено в точках равных потенциалов и ток по нему не идет. Окончательный вид схемы для расчёта сопротивления приведен на рисунке 3.

В этом случае имеем

$$R_{CD} = \frac{2R \cdot 4R}{2R + 4R} = \frac{4}{3}R. \quad (6)$$

из

(1)

см

Р .

(2)

и в

ие

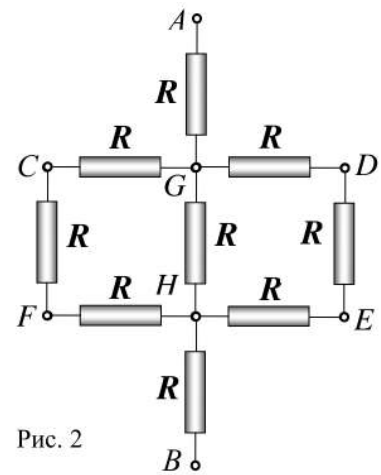


Рис. 2

И для мощности, соответственно,

$$P_{CD} = \frac{U^2}{R_{CD}} = \frac{3U^2}{4R} = 13 \text{ Вт.} \quad (7)$$

3. При одновременном подключении двух источников напряжения к клеммам $A - B$ и $C - D$ схемы Феде сила тока в каждой из ветвей схемы будет равна сумме сил токов, даваемых в данную ветвь каждым источником по отдельности

$$I_{AB+CD} = I_{AB} + I_{CD}. \quad (8)$$

Это следует из того, что закон Ома носит линейный характер и «закреплено» соответствующим принципом суперпозиции для нескольких источников напряжения в одной цепи. Однако тепловая мощность в данной ветви пропорциональна квадрату силы тока в ней $P_{AB+CD} \sim I_{AB+CD}^2$, который не будет равен сумме квадратов токов ($I_{AB+CD}^2 = I_{AB}^2 + I_{CD}^2 + 2I_{AB}I_{CD}$) от каждого источника напряжения по отдельности. Следовательно, утверждать, что в этом случае тепловая мощность

P_{AB+CD} , выделяемая в схеме, будет равна сумме мощностей P_{AB} и P_{CD} нельзя. Для этого требуется отдельный пересчёт.