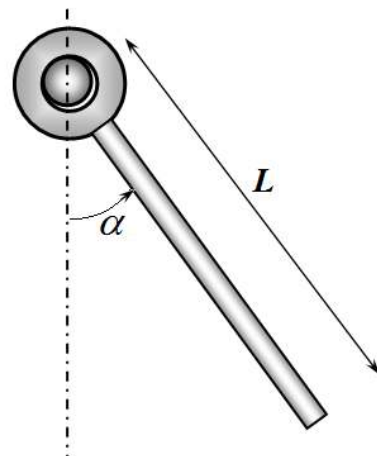


Условие

Задание 11-2. «Сухое трение»

Приборы и оборудование: Штатив с гладким стержнем, кусок проволоки (алюминиевая, двойная в пластиковой изоляции), круговая шкала (лимб), секундомер с памятью этапов, линейка.

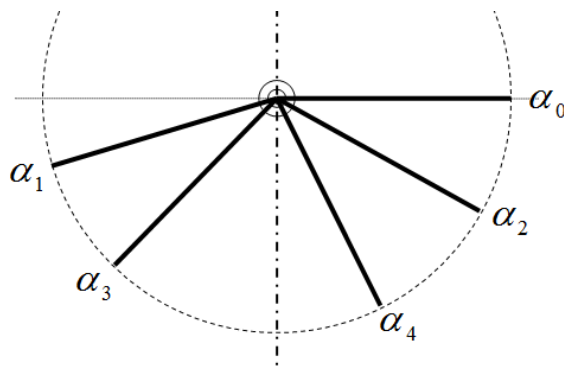


Изготовьте из куска провода маятник, способный колебаться на стержне. Для этого закрутите один из его концов вокруг стержня штатива (полтора – два оборота), но не слишком туго с небольшим зазором, чтобы колебания проволоки не затухали слишком быстро. Длина свободной части проволоки должна быть не менее 30-40 см, эта часть должна быть прямой. На том же стержне закрепите лист с угловой шкалой так, чтобы было возможно измерять углы отклонения маятника от вертикали α . Колебания маятника являются устойчивыми и воспроизводимыми, поэтому измерения можно проводить многократно с примерно одинаковыми результатами.

Часть 1. Измерительная.

Во всех случаях начальный угол отклонения маятника должен быть равным $\alpha_0 = 90^\circ$. Конечно, вручную практически невозможно измерить зависимость угла отклонения маятника от времени. Но достаточно просто фиксировать углы отклонения α_k и соответствующие времена t_k крайних положений маятника (точек остановки), тем более, что все измерения можно повторять.

Понятно, что все четные углы остановок α_{2k} являются положительными, а нечетные α_{2k-1} – отрицательными.



1.1 Измерьте зависимости времен «четных» остановок t_{2k} от индекса k . Постройте график полученной зависимости. 1.2 На основании проведенных измерений укажите, можно ли пренебречь изменением периода колебаний маятника от его амплитуды. 1.3 Рассчитайте средний период колебаний маятника T . Оцените погрешность полученного значения. 1.4 Измерьте зависимость углов «четных» остановок α_{2k} от индекса k .

Часть 2. Расчетная.

2.1 Рассчитайте приблизительно значения «нечетных» углов отклонения α_{2k-1} и соответствующих времен остановок t_{2k-1} . Приведите формулы, по которым Вы провели расчеты. 2.2 Постройте схематический график зависимости угла отклонения маятника от времени, считая движение между остановками равномерным.

2.3 Рассчитайте среднее значение модуля угловой скорости $|\omega_k|$ маятника на каждом интервале между двумя последовательными остановками от α_{k-1} до α_k .

2.4 Рассчитайте потери энергии механической энергии маятника ΔE_k на каждом интервале между двумя последовательными остановками от α_{k-1} до α_k .

2.5 Используя полученные данные, оцените коэффициент трения проволоки о стержень. Не забудьте привести теоретическое обоснование вашей оценки.

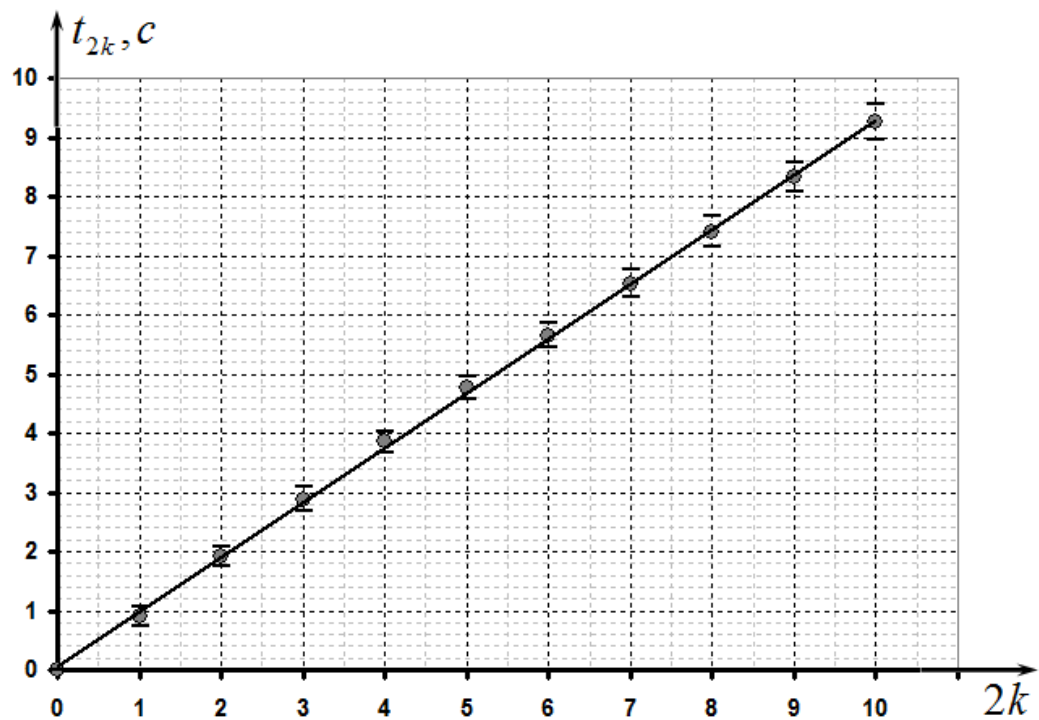
Решение

Задание 11-2. «Сухое трение»

1.1 Результаты измерений зависимости времен «четных» остановок t_{2k} от индекса k приведены в Таблице 1. Для каждого значения k проведено 3 измерения и проведено их усреднение. В последнем столбце приведены значения случайной погрешности проведенных измерений (по условию не требуется). Жирным шрифтом выделены данные, по которым построен график полученной зависимости¹, показанный на рис. 1.

Таблица 1

k	t_1, c	t_2, c	t_3, c	$\bar{t}, c$	$\Delta t, c$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,90	1,01	0,79	0,90	0,16
2	1,91	2,03	1,80	1,91	0,17
3	2,87	3,03	2,76	2,89	0,20
4	3,83	3,99	3,73	3,85	0,19
5	4,71	4,91	4,66	4,76	0,19
6	5,62	5,81	5,53	5,65	0,21
7	6,49	6,71	6,39	6,53	0,24
8	7,32	7,62	7,28	7,41	0,27
9	8,25	8,53	8,22	8,33	0,25
10	9,15	9,51	9,12	9,26	0,31



1.2 Практически строгая прямая пропорциональная зависимость говорит, что изменением периода колебаний от амплитуды можно пренебречь.

1.3 Очевидно, что коэффициент наклона полученной зависимости и равен периоду колебаний. Рассчитанное по МНК значение этого периода (и его погрешности) равно

$$T = (0,92 \pm 0,01)c. \quad (1)$$

1 1

1.4 Результаты измерений зависимости углов «четных» остановок α_{2k} от индекса k приведены в Таблице 2.

Таблица 2

Измерения			Расчеты						
	t_k, c	$\alpha_k, ^\circ$	k	t_k, c	$\alpha_k, ^\circ$	$\alpha_k, \text{рад}$	$\bar{\omega}_k$	$\Delta E'_k$	Z_k
0	0,000	90,0	0	0,000	90,00	1,57			
			1	0,450	-78,67	-1,37	6,54	0,197	5,00
2	0,900	67,3	2	0,900	67,33	1,18	5,66	0,189	3,88
			3	1,407	-62,00	-1,08	4,46	0,084	2,99
4	1,913	56,7	4	1,913	56,67	0,99	4,09	0,080	2,64
			5	2,400	-53,17	-0,93	3,94	0,050	2,40
6	2,887	49,7	6	2,887	49,67	0,87	3,69	0,048	2,19
			7	3,368	-47,17	-0,82	3,51	0,033	2,03
8	3,850	44,7	8	3,850	44,67	0,78	3,33	0,031	1,89
			9	4,305	-42,33	-0,74	3,34	0,028	1,79
10	4,760	40,0	10	4,760	40,00	0,70	3,16	0,027	1,67
			11	5,207	-37,83	-0,66	3,04	0,024	1,56
12	5,653	35,7	12	5,653	35,67	0,62	2,87	0,023	1,46
			13	6,092	-33,67	-0,59	2,76	0,020	1,36
14	6,530	31,7	14	6,530	31,67	0,55	2,60	0,019	1,27
			15	6,968	-29,67	-0,52	2,44	0,018	1,17
16	7,407	27,7	16	7,407	27,67	0,48	2,28	0,017	1,09
			17	7,870	-25,42	-0,44	2,00	0,018	0,99
18	8,333	23,2	18	8,333	23,17	0,40	1,83	0,016	0,89
			19	8,797	-20,92	-0,37	1,66	0,015	0,80
20	9,260	18,7	20	9,260	18,67	0,33	1,49	0,013	0,72

2.1 Расчет приблизительных значений «нечетных» углов отклонения α_{2k-1} и соответствующих времен остановок t_{2k-1} может быть проведен с помощью линейной аппроксимации по очевидным формулам

$$t_{2k-1} = \frac{t_{2k-2} + t_{2k}}{2}, \quad (2)$$

$$\alpha_{2k-1} = -\frac{\alpha_{2k-2} + \alpha_{2k}}{2}. \quad (3)$$

Результаты всех расчетов также приведены в Таблице 2. 2.2 Схематический график зависимости угла отклонения маятника от времени показан на рис.2. 2.3 Модуль средней угловой скорости на каждом интервале рассчитывается по формуле

$$\bar{\omega}_k = \frac{|\alpha_k - \alpha_{k-1}|}{t_k - t_{k-1}}. \quad (4)$$

Очевидно, что здесь и далее значения углов должны быть в радианах. 2.4 Потери энергии на каждом шаге равны изменению потенциальной энергии маятника в крайних положениях (где его кинетическая энергия равна нулю) по формуле

$$\Delta E_k = mg \frac{l}{2} (\cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k). \quad (5)$$

Имеет смысл рассчитать изменение энергии в относительных единицах, разделив ее на величину $E_0 = \frac{1}{2}mgl$:

$$\Delta E'_k = \frac{\Delta E_k}{E_0} = \cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k. \quad (6)$$

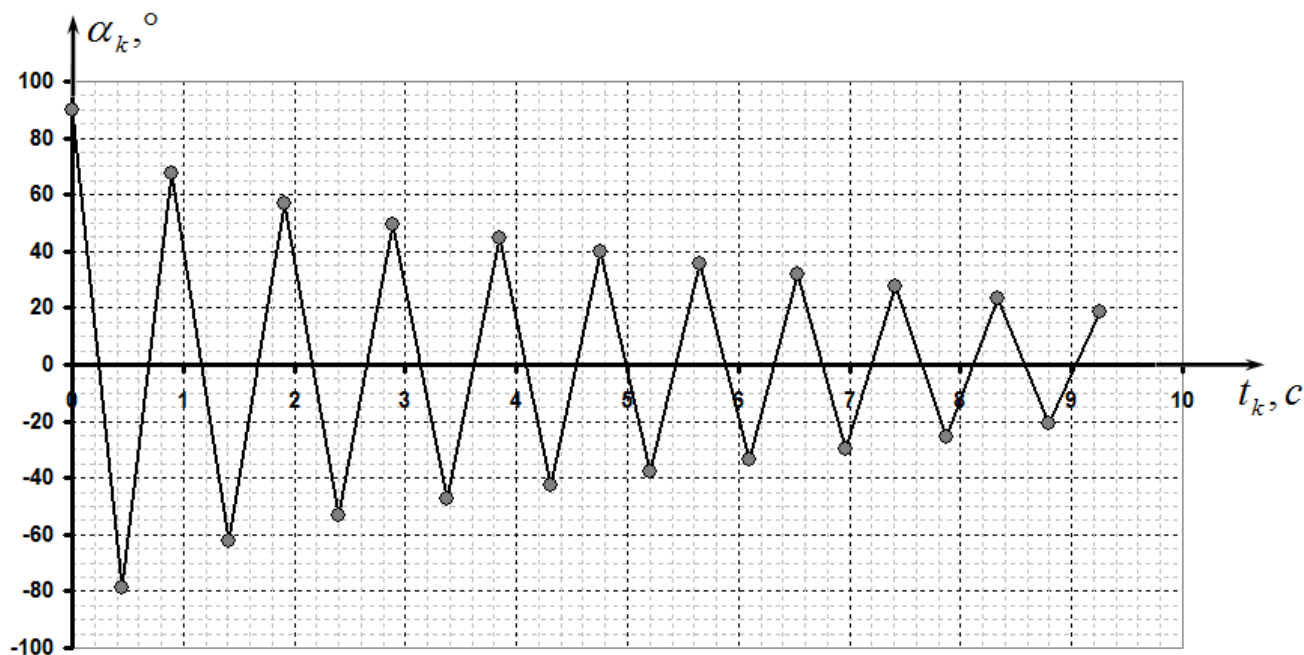


Рис.2

2.5 Рассчитанные потери энергии равны работе силы трения маятника о стержень. Для расчета этой работы рассмотрим динамику движения стержня. На рис. 3 показаны силы, действующие на стержень в процессе его движения.

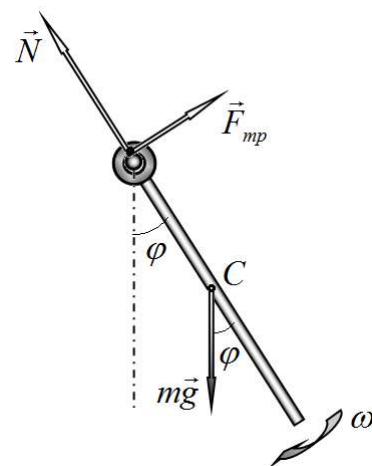
Уравнение 2 закона Ньютона в проекции на стержень имеет вид

$$m\omega^2 \frac{l}{2} = N - mg \cos \varphi, \quad (6)$$

из которого следует выражение для силы реакции

$$N = \frac{1}{2}m\omega^2 l + mg \cos \varphi. \quad (7)$$

Так как нам требуется провести только оценку коэффициента трения, можно достаточно грубо провести усреднение² этого выражения по каждому полупериоду колебаний



$$\overline{N}_k \approx \frac{1}{2}m\overline{\omega}^2l + mg = mg \left(\frac{\overline{\omega}_k^2l}{2g} + 1 \right). \quad (8)$$

В данном выражении мы также полагаем, что $\langle \cos \varphi \rangle \approx 1$.

Рис. 3

В этом приближении работа силы трения описывается формулой

$$\Delta E_k = A_{\text{тр}} = |\mu \overline{N} r (\alpha_k - \alpha_{k-1})| = \mu mgr \left(\frac{\overline{\omega}_k^2l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (9)$$

—

2 2

Приравнивая работу силы трения к изменению энергии маятника (5), получим

$$mg \frac{l}{2} (\cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k) = \mu mgr \left(\frac{\overline{\omega}_k^2l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (10)$$

Откуда следует выражение, допускающее проверку на основании экспериментальных данных:

$$\Delta E'_k = (\cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k) = 2 \frac{r}{l} \mu \left(\frac{\overline{\omega}_k^2l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (11)$$

Обозначим параметр

$$Z_k = \left(\frac{\overline{\omega}_k^2l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (12)$$

Тогда относительное измерение энергии оказывается прямо пропорциональным этому параметру

$$\Delta E'_k = 2 \frac{r}{l} \mu Z_k. \quad (13)$$

График этой функции показан на рис. 4.

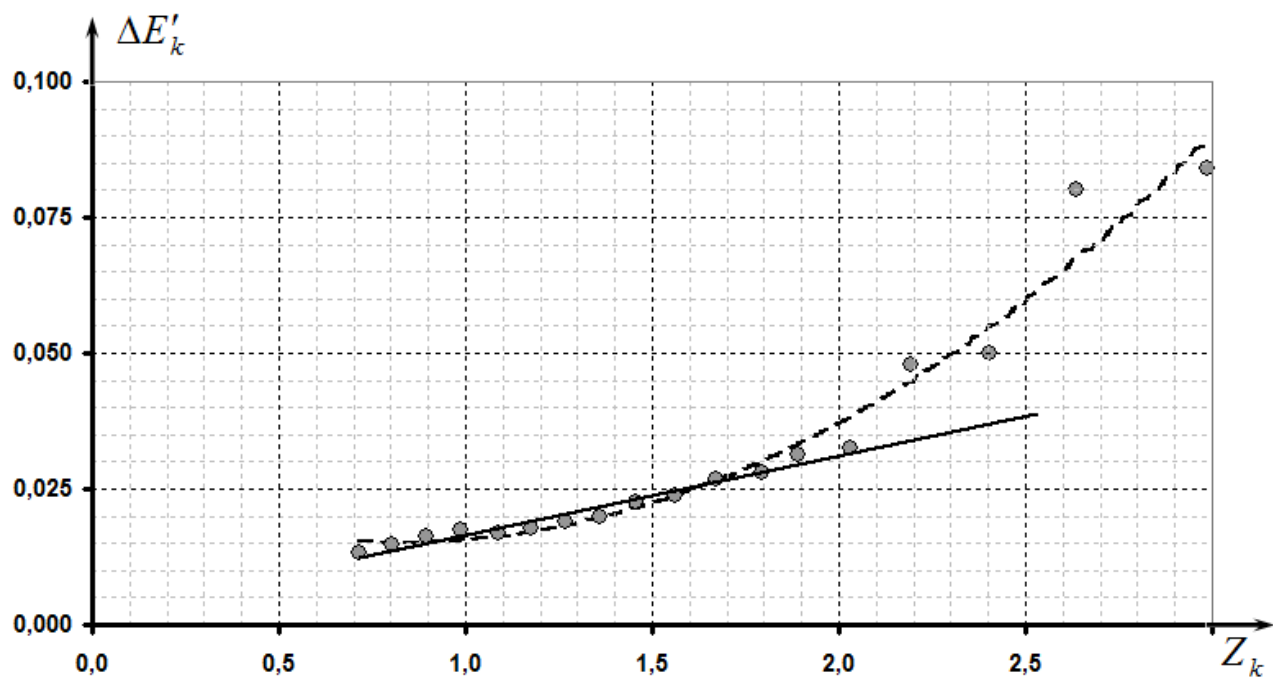


Рис. 4

Полученная зависимость, конечно, не является линейной – ожидать иного и не следовало, так как было сделано достаточно много упрощающих приближений. Однако, при малых отклонениях полученную зависимость можно аппроксимировать линейной функцией (отрезок прямой показан на рисунке). Действительно, при малых углах отклонения сделанные выше приближения обоснованны. Не сложно (графически, или по МНК) найти коэффициент наклона, который приблизительно равен $K = 0,014$. Из выражения (13) следует, что коэффициент наклона определяется формулой $K = 2 \frac{r}{l} \mu$, из которой можно рассчитать коэффициент трения

$$\mu = \frac{K l}{2 r} \approx 0,45. \quad (14)$$

¹ Строго говоря, в данном случае проведение сглаживающей прямой в данном случае не имеет смысла, так аргумент этой функции изменяется дискретно. Но мы провели ее, для наглядности, как иллюстрацию линейной зависимости.

² Более точные, но громоздкие расчеты, во-первых, излишни из-за достаточно больших погрешностей измерения углов, во-вторых, приводят практически к тем же результатам.