

## Условие

### Задание 10-1. «Трение в неподвижном блоке»

**Оборудование:** штатив с лапкой (высота стержня штатива должна быть не менее 80 см), неподвижный блок, грузы по 100г – 6шт, груз 50г – 1шт (все грузы должны быть с крючками с двух сторон), штангенциркуль, линейка (20 – 30см), динамометр с пределом измерения 2,5Н, динамометр с пределом измерения 5,0 Н, динамометр с пределом измерения 10,0Н, нить х/б длиной 1,0 – 1,5 м.

В данной задаче Вам необходимо исследовать зависимость силы, прилагаемой к нити при равномерном поднятии или опускании груза с помощью неподвижного блока, от силы тяжести груза.

#### Часть 1. Теоретическая

Через неподвижный блок перекинута нить. К одному концу нити прикреплён груз, массой  $m$ , к другому концу нити с помощью динамометра прикладывают силу  $F$ . Радиус колеса блока –  $R$ . Радиус оси блока –  $r$ .

$$\frac{R}{r} = \beta - \text{линейный параметр. Коэффициент трения между колесом и осью блока} - \mu.$$

Нить считайте невесомой и нерастяжимой. Массой колеса блока пренебречь.

1.1 Получите зависимость силы, прикладываемой к динамометру, от силы тяжести груза при равномерном поднятии груза  $F_1(mg)$ . Укажите вид данной зависимости. 1.2 Получите зависимость силы, прикладываемой к динамометру, от силы тяжести груза при равномерном опускании груза  $F_2(mg)$ . Укажите вид данной зависимости.

#### Часть 2. Экспериментальная

2.1 Исследуйте экспериментально зависимость  $F_1(mg)$ . 2.2 Исследуйте экспериментально зависимость  $F_2(mg)$ . 2.3 По экспериментальным данным п.2.1 определите коэффициент трения  $\mu_1$ . 2.4 По экспериментальным данным п.2.2 определите коэффициент трения  $\mu_2$ . 2.5 Определите относительную и абсолютную погрешность коэффициента трения  $\mu_1$ . 2.6 Определите относительную и абсолютную погрешность коэффициента трения  $\mu_2$ . 2.7 Объясните полученные значения погрешностей.

## Решение

### Задание 10-1 «Трение в неподвижном блоке»

#### Часть 1. Теоретическая

Для общности описания силы натяжения нити, переброшенной через блок, обозначим  $F_1$  и  $F_2$ . Причем сила  $F_1$  направлена в сторону движения блока (см. рис.). На рисунке обозначена точка касания колеса блока с осью – точка  $A$ . Именно к ней приложены сила нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр.}$ . Будем считать, что сила трения связана с силой нормальной реакции уравнением (закон Кулона – Амонтона):

$$F_{тр.} = \mu N. \quad (1)$$

Положение точки касания можно найти из условия равновесия вдоль горизонтальной оси:

$$N \sin \alpha = F_{тр.} \cos \alpha. \quad (2)$$

С учетом закона (1), из уравнения (2) следует

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu. \quad (3)$$

Условие равновесия вдоль вертикальной оси имеет вид: Условия равномерности движения имеют вид:

$$F_1 + F_2 = N \cos \alpha + F_{тр.} \sin \alpha. \quad (4)$$

Подставляя выражения для силы трения (1) и коэффициента трения (3), получим

$$F_1 + F_2 = N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = N(\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha) = \frac{N}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Наконец, запишем условия равновесия моментов сил, действующих на колесо блока

$$(F_1 - F_2)R = F_{тр.}r. \quad (6)$$

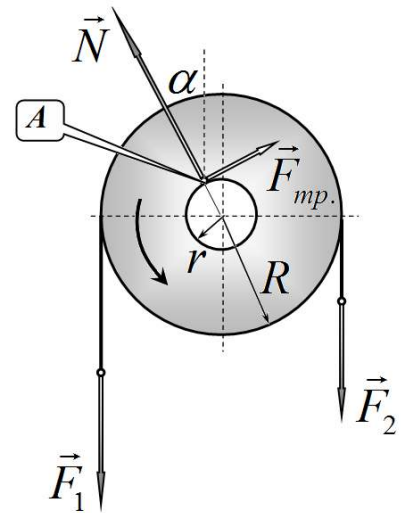
В это уравнение также следует подставить ранее найденные соотношения (сила реакции выражается из уравнения (5)), в результате получаем:

$$(F_1 - F_2)R = F_{тр.} \cdot r = \mu N \cdot r = (F_1 + F_2) \cos \alpha \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha = (F_1 + F_2)r \sin \alpha. \quad (7)$$

Последнее соотношение запишем в виде

$$(F_1 - F_2) = \gamma(F_1 + F_2). \quad (8)$$

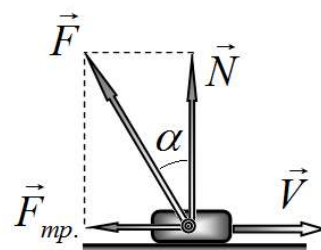
Здесь обозначено  $\gamma = \frac{\sin \alpha}{\beta}$ ,  $\beta = \frac{R}{r}$ . Запишем также явное выражение для силы  $F_1$ , следующее из формулы (8):



$$F_1 = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} F_2 \quad (9)$$

### Дополнение.

Приведем также очень краткое, но нетрадиционное теоретическое решение этой задачи. В его основе лежит понимание смысла закона для силы трения и коэффициента трения. Сила взаимодействия движущегося тела с поверхностью, по которой происходит движение,  $\vec{F}$  разлагается на две составляющих: нормальную  $\vec{N}$  (сила нормальной реакции) и касательную  $\vec{F}_{\text{тр.}}$ , которая является силой трения. Тангенс угла  $\alpha$ , под которым направлена суммарная сила  $\vec{F}$  к нормали, является коэффициентом трения  $\text{tg } \alpha = \mu$ .



Обратимся к рис. 1. Суммарная сила взаимодействия колеса блока с осью должна быть направлена вертикально, поэтому точка касания  $A$  лежит на прямой отклоненной от вертикали на угол  $\alpha$ , тангенс которого равен коэффициенту трения. При равномерном движении сумма моментов сил, действующих на колесо блока равна нулю, относительно любой точки. Запишем это условие относительно точки касания  $A$ :

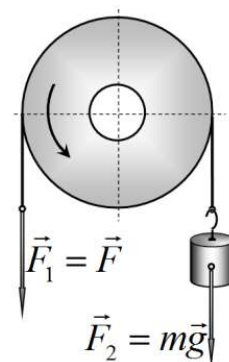
$$F_1(R - r \sin \alpha) = F_2(R + r \sin \alpha).$$

Из этого уравнения сразу следует

$$F_1 = F_2 \frac{1 + \frac{r}{R} \sin \alpha}{1 - \frac{r}{R} \sin \alpha},$$

что эквивалентно уравнению (9).

Теперь можно записать соотношения, которые подлежат экспериментальной проверке.



### 1. Подъем груза.

В этом случае силой  $F_1$  является измеряемая динамометром сила  $F$ , а силой  $F_2$  - сила тяжести грузов  $F_2 = mg$ . Поэтому соотношение (9) имеет вид

$$F = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} mg. \quad (10)$$

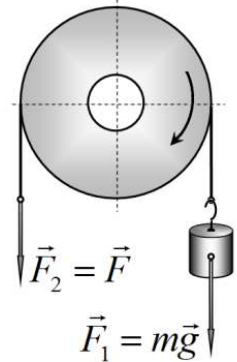
## 2. Опускание груза.

В этом случае силы  $F_1$  и  $F_2$  меняются местами:  $F_1 = mg$ ,  $F = F_2$ . Следовательно, соотношение (9) принимает вид

$$mg = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} F,$$

Из которого следует:

$$F = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} mg. \quad (11)$$



Кроме того, отметим, что параметр  $\gamma = \frac{\sin \alpha}{\beta}$  может быть определен с помощью выражения (8). Для этого следует построить и проанализировать зависимость разности сил от их суммы. В этой зависимости коэффициент наклона равен искомому параметру.

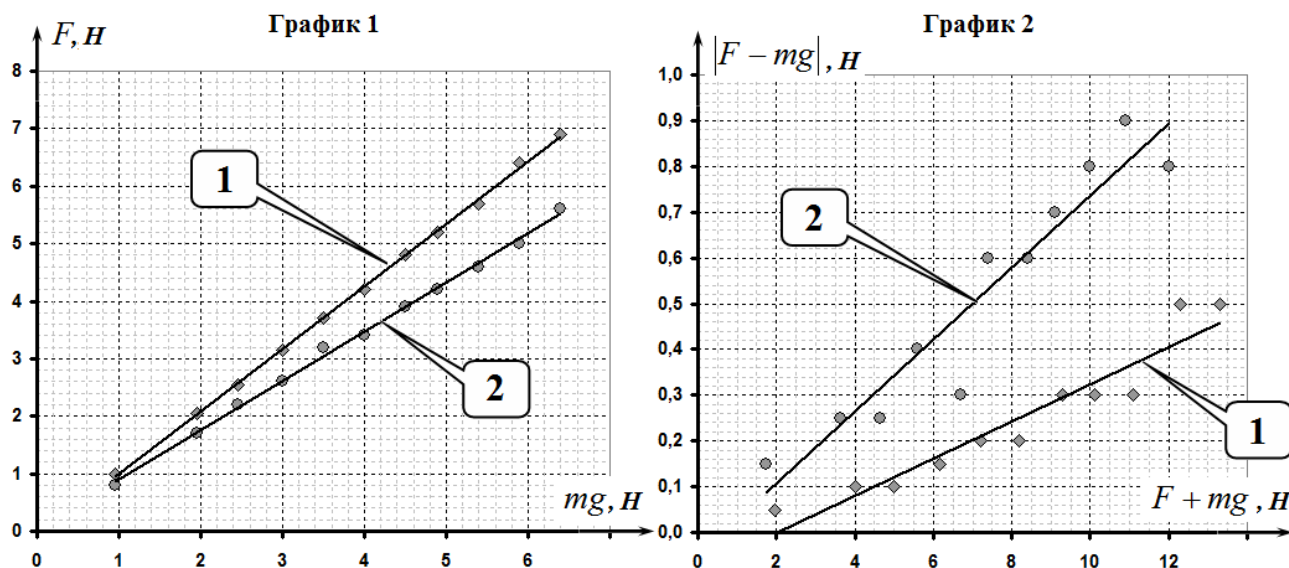
## Часть 2. Экспериментальная

В таблице 1 приведены результаты измерений и необходимых расчетов.

Таблица 1.

|          | подъем    | опускание | подъем           |                  | опускание        |                  |
|----------|-----------|-----------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $mg$ , Н | $F_1$ , Н | $F_2$ , Н | $(F_1 + mg)$ , Н | $(F_2 - mg)$ , Н | $(F_2 + mg)$ , Н | $(mg - F_2)$ , Н |
| 0,95     | 1,00      | 0,80      | 1,95             | 0,05             | 1,75             | 0,15             |
| 1,95     | 2,05      | 1,70      | 4,00             | 0,10             | 3,65             | 0,25             |
| 2,45     | 2,55      | 2,20      | 5,00             | 0,10             | 4,65             | 0,25             |
| 3,00     | 3,15      | 2,60      | 6,15             | 0,15             | 5,60             | 0,40             |
| 3,50     | 3,70      | 3,20      | 7,20             | 0,20             | 6,70             | 0,30             |
| 4,00     | 4,20      | 3,40      | 8,20             | 0,20             | 7,40             | 0,60             |
| 4,50     | 4,80      | 3,90      | 9,30             | 0,30             | 8,40             | 0,60             |
| 4,90     | 5,20      | 4,20      | 10,10            | 0,30             | 9,10             | 0,70             |
| 5,40     | 5,70      | 4,60      | 11,10            | 0,30             | 10,00            | 0,80             |
| 5,90     | 6,40      | 5,00      | 12,30            | 0,50             | 10,90            | 0,90             |
| 6,40     | 6,90      | 5,60      | 13,30            | 0,50             | 12,00            | 0,80             |

Ниже приведены графики, иллюстрирующие полученные экспериментальные данные.



На графике 1 приведены зависимости силы, прикладываемой к нити, от массы подвешенного груза: 1 — при подъеме груза, 2 — при его опускании. По коэффициентам наклона этих графиков можно рассчитать значение параметра  $\gamma$ , а затем на основании его определения  $\gamma = \frac{\sin \alpha}{\beta}$ ,  $\beta = \frac{R}{r}$ , найти коэффициент трения  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ . Для этого следует воспользоваться формулой

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\beta \gamma}{\sqrt{1 - (\beta \gamma)^2}}. \quad (12)$$

Очевидно, что основная погрешность расчета коэффициента трения определяется погрешностью параметра  $\gamma$ , поэтому может быть рассчитана по формуле

$$\Delta \mu = \left| \frac{d\mu}{d\gamma} \right| \Delta \gamma = \frac{\beta}{(1 - (\beta \gamma)^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta \gamma.$$

**Замечание.** Все погрешности косвенных измерений также могут быть рассчитаны методом границ!

Прямые измерения диаметров колеса блока и его оси приводят к значениям  $D = 41,7$  мм и  $d = 5,0$  мм, следовательно, их отношение равно

$$\beta = \frac{D}{d} = 8,34.$$

Дальнейшие расчеты для обеих зависимостей аналогичны, поэтому проведем их параллельно в Таблице 2.

**Таблица 2. Расчет коэффициента трения**

| Номер шага | Действие                                           | Подъем                                                                                                                                          | Опускание                                                                                        |  |  |  |
|------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|
| 1          | Формула для коэффициента наклона                   | $k_1 = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$                                                                                                               | $k_2 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$                                                                |  |  |  |
| 2          | Формулы для расчета параметра $\gamma$             | $\gamma = \frac{k_1-1}{k_1+1}$                                                                                                                  | $\gamma = \frac{1-k_2}{1+k_2}$                                                                   |  |  |  |
| 3          | Формула для расчета погрешности параметра $\gamma$ | $\Delta\gamma = \left  \frac{d\gamma}{dk_1} \right  \Delta k_1 = \frac{(k_1+1)-(k_1-1)}{(k_1+1)^2} \Delta k_1 = \frac{2}{(k_1+1)^2} \Delta k_1$ | $\Delta\gamma = \left  \frac{d\gamma}{dk_2} \right  \Delta k_2 = \frac{2}{(k_2+1)^2} \Delta k_2$ |  |  |  |
| 4          | Значение коэффициента наклона, рассчитанное по МНК | $k_1 = 1,084 \pm 0,018$                                                                                                                         | $k_1 = 0,85 \pm 0,03$                                                                            |  |  |  |
| 5          | Относительная погрешность коэффициента наклона     | $\varepsilon_{k1} \approx 1,7\%$                                                                                                                | $\varepsilon_{k2} \approx 3,5\%$                                                                 |  |  |  |
| 6          | Значение параметра $\gamma$                        | $\gamma = 0,040 \pm 0,008$                                                                                                                      | $\gamma = 0,079 \pm 0,017$                                                                       |  |  |  |
| 7          | Относительная погрешность параметра $\gamma$       | $\varepsilon_{\gamma1} \approx 20\%$                                                                                                            | $\varepsilon_{\gamma2} \approx 22\%$                                                             |  |  |  |
| 8          | Значение коэффициента трения $\mu$                 | $\mu_1 = 0,36 \pm 0,08$                                                                                                                         | $\mu_2 = 0,88 \pm 0,34$                                                                          |  |  |  |
| 9          | Относительная погрешность $\mu$                    | $\varepsilon_{\mu1} \approx 22\%$                                                                                                               | $\varepsilon_{\mu2} \approx 39\%$                                                                |  |  |  |

Первое, что следует отметить – существенное значимое различие в рассчитанных значениях коэффициентов трения, которое не может быть объяснено погрешностями измерений! Выяснение причин этого парадоксального вывода является серьезным поводом для дальнейших исследований (возможно, на одной из последующих олимпиад!).

Второе – неожиданное, на первый взгляд, возрастание относительной погрешности в цепочке расчетов  $k \rightarrow \gamma \rightarrow \mu$ . Этот результат имеет разумное объяснение. Фактически в основе расчета лежит отклонение коэффициента наклона от единицы  $|k-1|$ , а эта величина сравнима с погрешностью измерения коэффициента наклона  $k$ , поэтому относительная погрешность величины  $|k-1|$  значительно больше, чем относительная погрешность самого коэффициента наклона.

Альтернативным способом обработки результатов измерения является использование формулы (8). Эти зависимости показаны на графике 2. Как видно, разброс экспериментальных точек здесь намного значительнее, поэтому погрешности расчетов коэффициентов наклона должны быть больше. Правда, в этом методе коэффициенты наклона непосредственно равны параметру  $\gamma$  и не последующий пересчет не требуется. Действительно, расчеты по МНК дают следующие результаты:

- При подъеме грузов:  $\gamma_1 = 0,041 \pm 0,008$ ; - При опускании:  $\gamma_2 = 0,079 \pm 0,017$ .

Как и следовало ожидать, полученные значения (и их погрешности) совпадают с результатами предыдущих длительных расчетов (см. строку 6 в таблице 2). Таким образом, для уменьшения погрешности следует точнее измерять, а не искать иные методы расчета, хотя следует отметить, что второй способ гораздо короче!

## Задача 10-1 «Мостовая схема»

**1.1** Методика выполнения первой части этой задачи очевидна и не требует пояснений. Результаты измерений, естественно, зависят от выданного оборудования.

**1.2** Отметим, что в этой части задачи сила тока изменяется в достаточно узком диапазоне, минимальное значение силы тока достигается при среднем положении вывода второго реостата, максимальной в крайних положениях.

### 1.3 Основная схема.

Результаты требуемых измерений, а также результаты теоретических расчетов приведены в таблице. 1.

| Измерения  |          |          | Теоретические расчеты |                    |                     |            |                    |
|------------|----------|----------|-----------------------|--------------------|---------------------|------------|--------------------|
|            |          |          | Схема с вольтметром   |                    | Схема с амперметром |            |                    |
| $R_x$ , Ом | $U$ , мВ | $I$ , мА |                       | $U_{\text{теор.}}$ | $I_1$ , мА          | $I_2$ , мА | $I_{\text{теор.}}$ |
| 0,1        | -221,0   | -28,5    |                       | -194,8             | 0,64                | 33,66      | -33,02             |
| 0,6        | -206,0   | -27,6    |                       | -182,2             | 3,61                | 33,29      | -29,68             |
| 1,3        | -188,0   | -24,3    |                       | -164,5             | 7,23                | 32,74      | -25,51             |
| 2,0        | -165,0   | -18,7    |                       | -146,7             | 10,33               | 32,16      | -21,83             |
| 2,6        | -147,0   | -16,6    |                       | -131,6             | 12,65               | 31,63      | -18,98             |
| 3,3        | -128,0   | -15,4    |                       | -113,9             | 15,04               | 30,97      | -15,92             |
| 4,0        | -111,0   | -12,8    |                       | -96,1              | 17,15               | 30,26      | -13,10             |
| 4,7        | -87,0    | -9,5     |                       | -78,4              | 19,03               | 29,50      | -10,47             |
| 5,0        | -79,0    | -8,0     |                       | -70,8              | 19,77               | 29,15      | -9,38              |
| 5,8        | -56,0    | -5,4     |                       | -50,6              | 21,58               | 28,18      | -6,60              |
| 6,5        | -37,0    | -3,5     |                       | -32,9              | 23,00               | 27,25      | -4,25              |
| 7,4        | -16,0    | -1,7     |                       | -10,1              | 24,64               | 25,93      | -1,30              |
| 7,8        | 0,0      | 0,0      |                       | 0,0                | 25,30               | 25,30      | 0,00               |
| 8,4        | 14,0     | 1,5      |                       | 15,2               | 26,24               | 24,29      | 1,95               |
| 8,7        | 25,0     | 2,6      |                       | 22,8               | 26,68               | 23,75      | 2,93               |
| 9,5        | 47,0     | 4,0      |                       | 43,0               | 27,79               | 22,21      | 5,58               |
| 9,9        | 59,0     | 5,2      |                       | 53,1               | 28,30               | 21,37      | 6,94               |
| 10,8       | 84,0     | 9,1      |                       | 75,9               | 29,38               | 19,28      | 10,10              |
| 11,3       | 94,0     | 10,4     |                       | 88,6               | 29,94               | 17,98      | 11,95              |
| 12,0       | 116,0    | 13,4     |                       | 106,3              | 30,67               | 15,98      | 14,69              |
| 12,7       | 136,0    | 16,1     |                       | 124,0              | 31,35               | 13,71      | 17,63              |
| 13,5       | 157,0    | 17,5     |                       | 144,2              | 32,07               | 10,73      | 21,34              |
| 14,0       | 173,0    | 20,1     |                       | 156,9              | 32,50               | 8,61       | 23,88              |
| 14,8       | 200,0    | 25,1     |                       | 177,1              | 33,14               | 4,71       | 28,43              |
| 15,4       | 215,0    | 28,1     |                       | 192,3              | 33,59               | 1,27       | 32,32              |

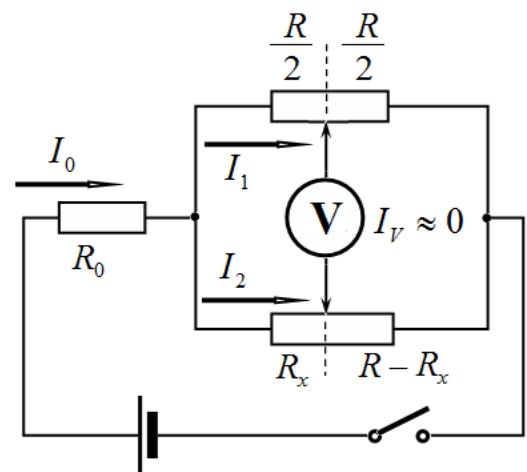
Все измерения проведены при следующих значениях параметров электрической цепи: Сопротивление первого («верхнего») резистора  $R = 16,1$  Ом; Сопротивление второго резистора  $R = 15,6$  Ом; Добавочное сопротивление  $R_0 = 75$  Ом; Напряжение источника  $U_0 = 4,2$  В. Обсуждение результатов измерений и их теоретическое обоснование проведем параллельно.

### Схема с вольтметром (измерение напряжения)

В этом случае можно пренебречь силой тока, протекающего через вольтметр, ввиду того, что его сопротивление (порядка 1 Мом) значительно больше сопротивлений остальных элементов цепи. В этом приближении теоретический расчет измеренного напряжения не представляет труда. Для упрощения расчетов пренебрежем незначительной разностью сопротивлений резисторов, также будем считать, что средняя точка «верхнего» резистора выставлена точно. В рамках этих допущений сила тока в основной цепи описывается формулой

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0 + \frac{R}{2}}. \quad (1)$$

Этот ток делится на две равные части, проходящие по реостатам

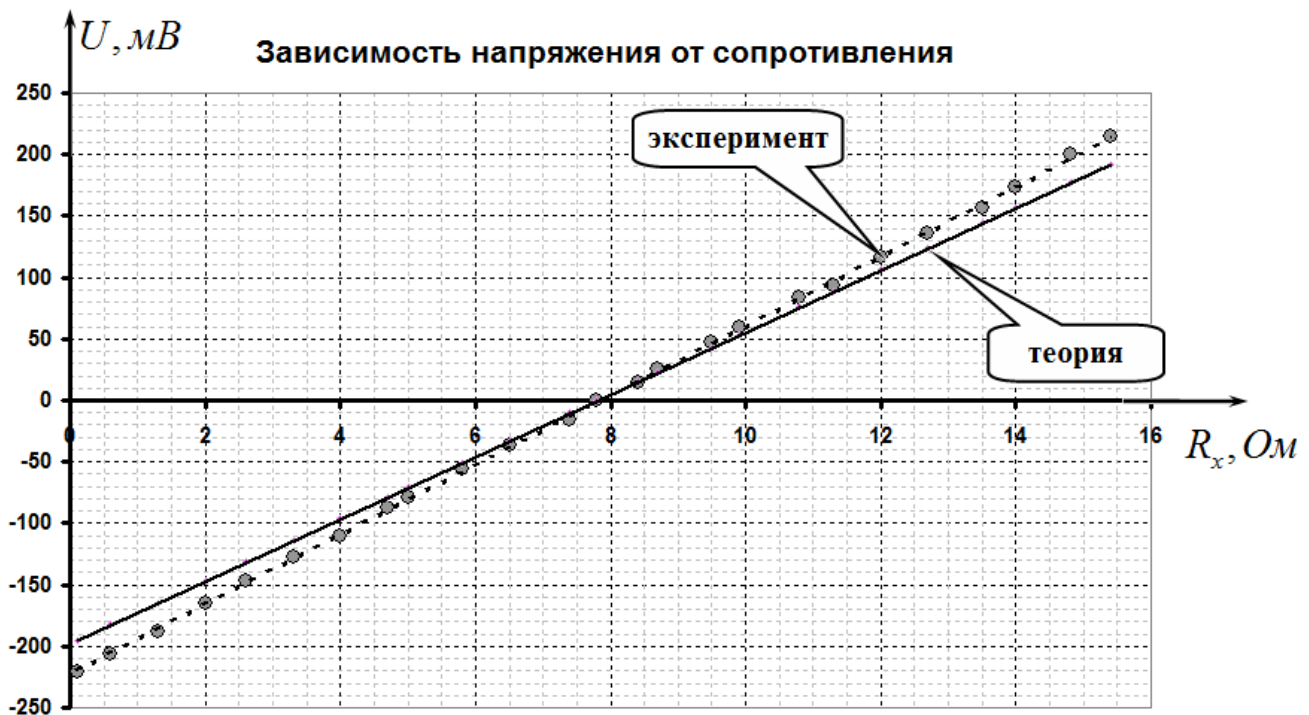


$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2} = \frac{U_0}{2R_0 + R}. \quad (2)$$

Тогда измеряемое напряжения может быть рассчитано по формуле

$$U_V = I_2 R_x - I_1 \frac{R}{2} = \frac{U_0}{2R_0 + R} \left( R_x - \frac{R}{2} \right). \quad (3)$$

На графике показаны результаты измерений и расчетов по формуле (3) данной зависимости.

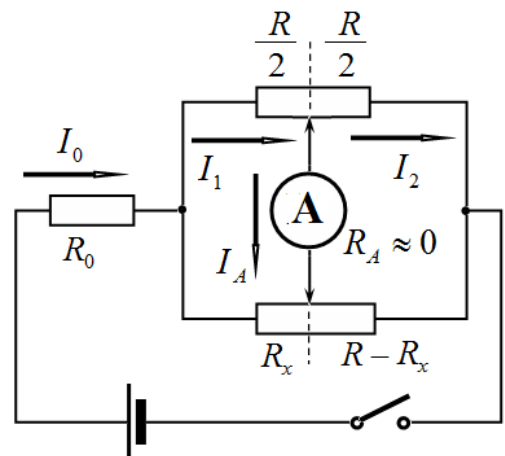


Получено хорошее соответствие между результатами измерений и теоретической прямой. Незначительное расхождение может быть объяснено сделанными допущениями при выводе теоретической формулы.

### Схема с амперметром (измерение силы тока)

В этой схеме следует пренебречь сопротивлением амперметра. Тогда мостовая часть схемы преобразуется в две пары параллельно соединенных резисторов.

При параллельном соединении силы токов разделяются обратно пропорционально сопротивлениям резисторов, поэтому силы токов через обе части «верхнего» резистора определяются по формулам (обратите внимание, здесь обозначения сил токов отличаются от предыдущей схемы):



$$I_1 = I_0 \frac{R_x}{\frac{1}{2}R + R_x}, \quad I_2 = I_0 \frac{R - R_x}{\frac{3}{2}R - R_x}. \quad (4)$$

А сила тока через амперметр оказывается равной

$$I_A = I_1 - I_2. \quad (5)$$

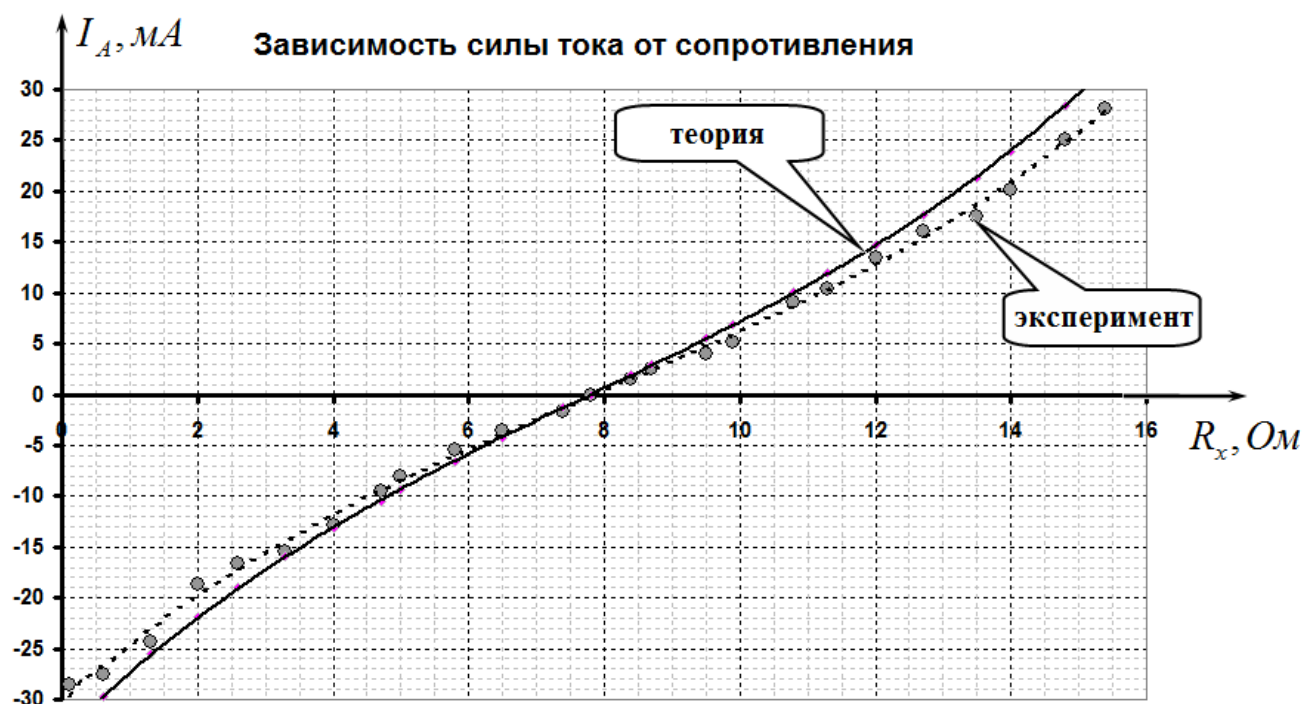
В этих формулах  $I_0$  — сила тока в основной цепи. При ее расчете можно принять во внимание, что сопротивление  $R_0$  заметно больше сопротивления мостовой части, поэтому можно положить

$$I_0 \approx \frac{U_0}{R_0}. \quad (6)$$

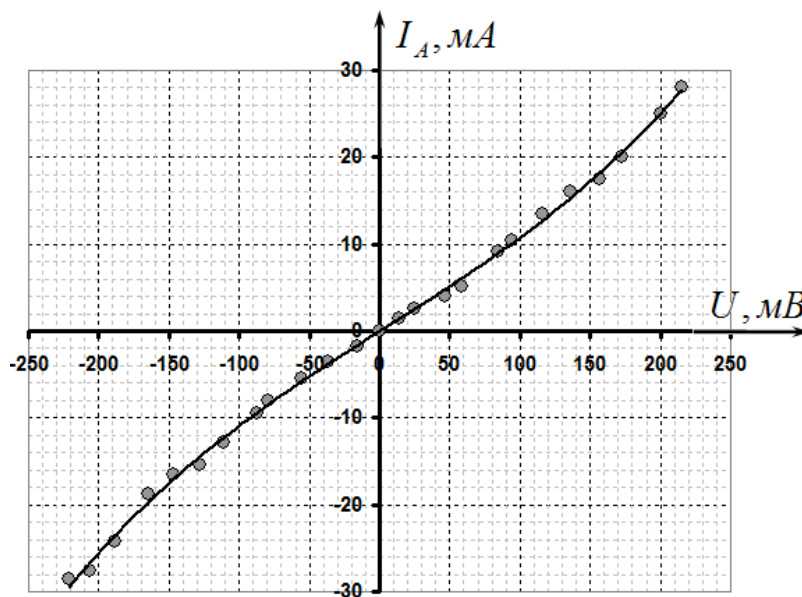
Этот приближение также оправдано результатами измерений в п. 1.2 Формулы (4)-(6) позволяют провести расчет силы тока через амперметр.

*Примечание. Не составляет особого труда привести и точное выражение для силы тока, однако, расчет по этой формуле только увеличивает время, не давая существенного выигрыша в точности.*

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0 + \frac{\frac{R}{2}R_x}{\frac{R}{2} + R_x} + \frac{\frac{R}{2}(R - R_x)}{\frac{3}{2}R - R_x}}.$$



На следующем рисунке приведены результаты измерений и расчета зависимости силы тока через амперметр от сопротивления  $R_x$ . В этом случае также видно хорошее соответствие между результатами измерений и расчетов.



Отдельно выделим пункт 1.3.3. Не представляет труда построить требуемый график (*оси подписаны и оцифрованы, нанесены все экспериментальные точки, проведена сглаживающая линия*) зависимости силы тока  $I_A$  от напряжения  $U_V$ . Можно даже сказать, что при небольших напряжениях примерно выполняется прямо пропорциональная зависимость. Однако, делать какие-либо выводы на основании полученной зависимости не следует! Рассматриваются принципиально разные электрические цепи, с различными распределениями токов – искать связь между ними, приблизительно то же, что искать связь между напряжением в Москве и силой тока в Минске! Поэтому данный пункт следует рассматривать как шутку авторов данной задачи (может не слишком удачную).