

молярными

Условие

Задание 3. Теплоёмкость процесса.

В задаче рассматриваются равновесные процессы, проходящие с одним молем идеального газа. Поэтому все характеристики состояния газа и происходящих процессов являются «молярными» - молярный объем, молярные теплоемкости и т.д.

Математическая подсказка. Если аргумент функции $y = ax^m$ изменяется на малую величину Δx , то изменение функции равно $\Delta y = amx^{m-1}\Delta x$, при любом показателе степени.

Часть 1. Политропические процессы.

Теплоемкость является характеристикой процесса. Процессы, в ходе которых теплоемкость остается постоянной, называются **политропическими**. В общем случае уравнение политропического процесса имеет вид

$$PV^n = const, \quad (1)$$

где n - постоянное число (не обязательно целое), называемое **показателем политропы**.

3.1.1 Покажите, что теплоемкость идеального газа в произвольном процессе определяется уравнением

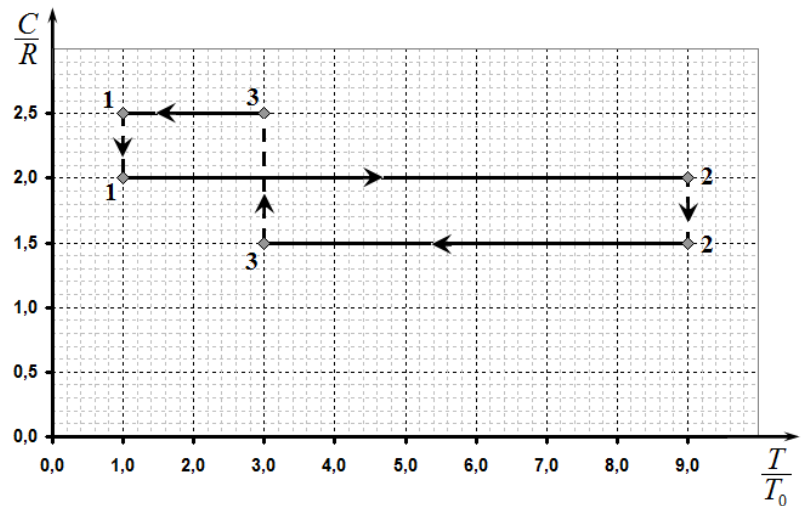
$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}, \quad (2)$$

где C_V - теплоемкость газа при изохорном процессе, ΔV изменение объема газа в рассматриваемом процессе при малом изменении температуры ΔT .

3.1.2 Покажите, что в процессах, описываемых уравнением (1) теплоемкость остается постоянной. Найдите теплоемкость одного моля идеального одноатомного газа в политропическом процессе (1), т.е. установите связь между молярной теплоемкостью C и показателем политропы n .

3.1.3 Укажите значения молярной теплоемкости C и соответствующего ей показателя n в известных процессах. Результаты представьте в следующей таблице.

№	Процесс	**Молярная теплоемкость C^{**}	**Показатель n^{**}
1	Изобарный		
2	Изотермический		
3	Изохорный		
4	Адиабатный		



Часть 2. «Разорванный» цикл.

Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс, в котором теплоемкость зависит от температуры в соответствии с графиком, приведенном на рис. 1. Здесь $T_0 = 300 \text{ K}$ - температура газа в состоянии 1;

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$$

- универсальная газовая постоянная.

3.2.1 Изобразите этот цикл на диаграмме $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$, где P_0, V_0 - давление и объем газа в состоянии 1. 3.2.2 Рассчитайте работу газа за весь цикл. 3.2.3 Найдите термический КПД цикла. 3.2.4 Предложите простое устройство, в котором реализуется процесс 1-2.

Решение

Задание 3. Теплоемкость процесса.

Часть 1. Политропические процессы.

3.1.1 Теплоемкость системы определяется как отношение количества теплоты, полученной системой к изменению ее температуры

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T}. \quad (1)$$

Используя уравнение первого закона термодинамики для идеального газа

$$\delta Q = \Delta U + \delta A = C_V \Delta T + P \Delta V, \quad (2)$$

получим требуемое в условии соотношение

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (3)$$

3.1.2 Запишем уравнение процесса в виде

$$PV^n = B, \quad (4)$$

где B — некоторая постоянная. С помощью уравнения состояния идеального газа

$$PV = RT \quad (5)$$

Выразим явную зависимость температуры газа от его объема

$$T = \frac{B}{R} V^{1-n}. \quad (6)$$

Из вида этой зависимости с помощью математической подсказки находим

$$\Delta T = \frac{B}{R} V^{-n} (1-n) \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{RV^n}{B(1-n)}.$$

Подставляя в уравнение (3) выражения (7) и выражения для давления в данном процессе, следующее из (7), получим

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n}.$$

3.1.3 Уравнение изобарного процесса $P = \text{const}$ следует из общего уравнения политропического процесса $PV^n = \text{const}$ при $n = 0$. Из общей формулы (8) следует, что в этом процессе $C = \frac{5}{2}R$.

Уравнение изотермического процесса имеет вид $PV = \text{const}$. Для этого процесса $n = 1$. Следовательно, в этом процессе $C \rightarrow \infty$

Для определения параметров изохорного процесса, запишем общее уравнение политропического процесса в виде

$$PV^n = \text{const} \quad \Rightarrow \quad P^{\frac{1}{n}}V = \text{const},$$

из которого следует, что в этом процессе $n \rightarrow \infty$, поэтому $C = C_V = \frac{3}{2}R$.

Из определения адиабатного процесса, как процесса без теплообмена, следует, что в этом процессе $C = 0$. Тогда из формулы (8) следует

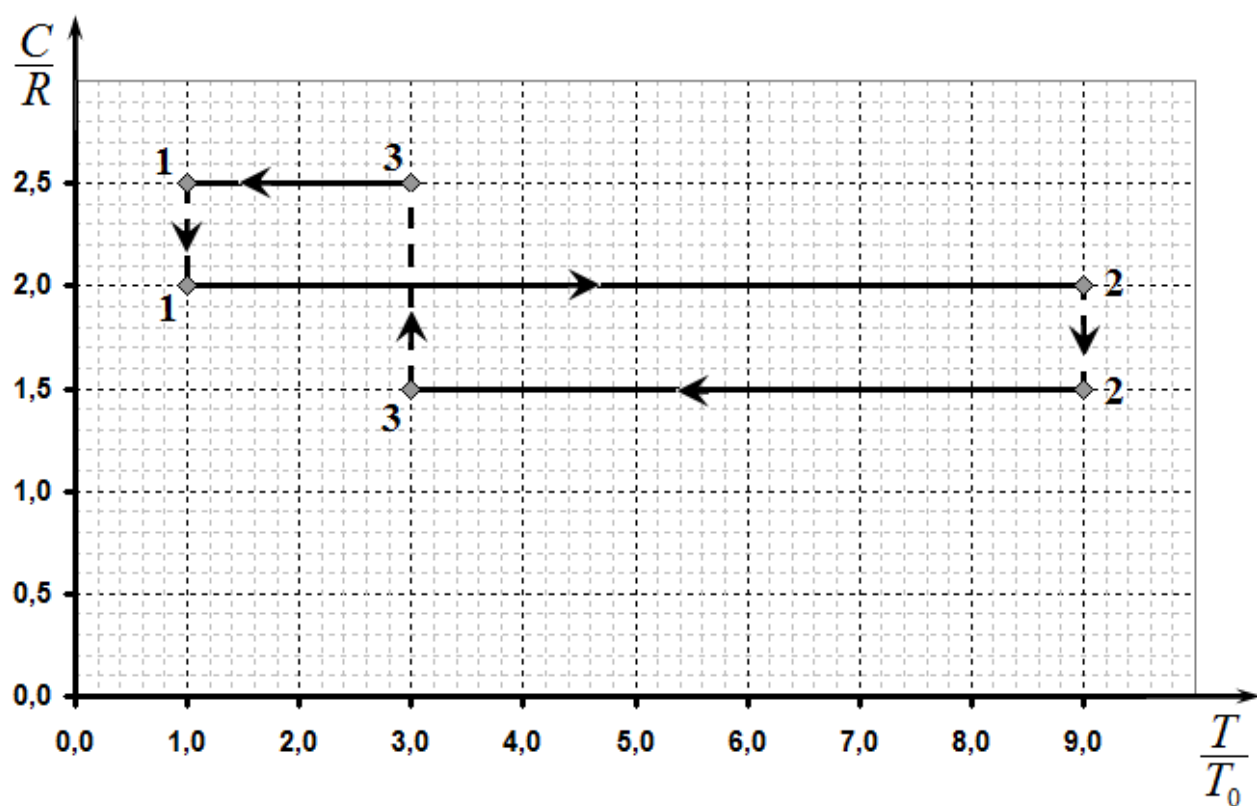
$$C = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{5}{3}.$$

Полученные значения сведены в таблице.

Таблица.

№	Процесс	Показатель n	Молярная теплоемкость C
1	Изобарный	$n = 0$	$C = \frac{5}{2}R$
2	Изотермический	$n = 1$	$C \rightarrow \infty$
3	Изохорный	$n \rightarrow \infty$	$C = \frac{3}{2}R$
4	Адиабатный	$n = \frac{5}{3}$	$C = 0$

Часть 2. «Разорванный» цикл.



политропическими процессами. В процессах 2-3 и 3-1 легко узнать изохорный и изобарный процессы, соответственно.

В процессе 1-2 теплоемкость постоянна и равна $C = 2R$, поэтому показатель политропы в этом процессе равен

$$\frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n} = 2R \Rightarrow n = -1. \quad (11)$$

Следовательно, уравнение этого процесса имеет вид $PV^{-1} = \text{const} = B$, или

$$P = BV, \quad (12)$$

Т.е. в этом процессе давление прямо пропорционально объему!

Из графика следует, что температура в этом процессе возросла в 9 раз. Подставляя уравнение процесса (12) в уравнения состояния, получим

$$BV^2 = RT. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в данном процессе объем и давление возрастают в три раза.

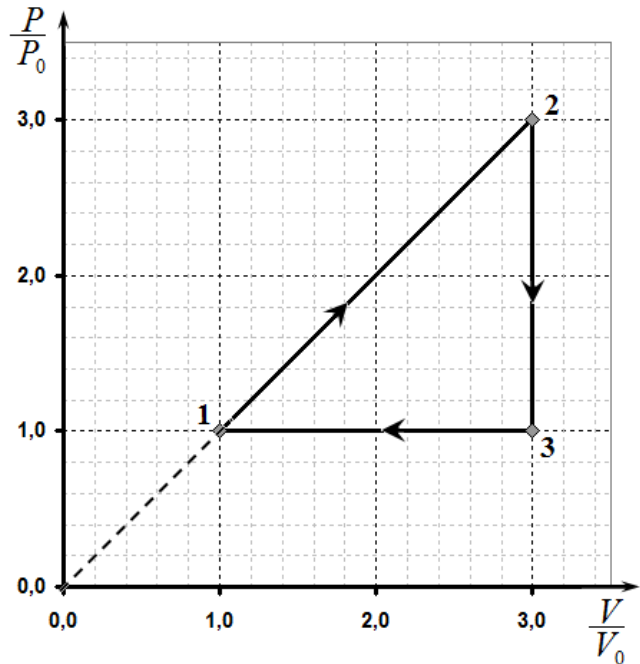
Это позволяет построить график процесса в требуемых координатах $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$ (см. рисунок).

3.2.2 Работа, совершенная за цикл численно равна площади цикла в координатах (P, V) . Поэтому в данном случае

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{2}(P_2 - P_3)(V_3 - V_1) = 2P_0V_0 \quad (14)$$

Используя уравнения состояния, последнее выражение можно записать в виде, который дает возможность найти численное значение работы

$$A = 2P_0V_0 = 2RT_0 = 5,0 \text{ кДж} \quad (15)$$



3.2.3 Очевидно, что в данном циклическом процессе газ получает теплоту только на участке 1-2. Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты рассчитывается по формуле

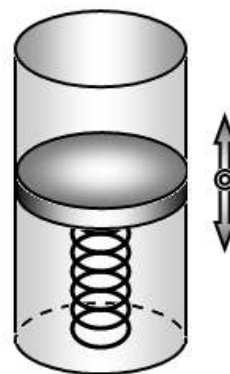
$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \quad (16)$$

Здесь изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) = 12RT_0 = 12P_0V_0; \quad (17)$$

А работа на этом участке равна площади трапеции под отрезком прямой 1-2:

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_3}{2}(V_3 - V_1) = 4P_0V_0. \quad (18)$$



Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A_{\Sigma}}{Q_{12}} = \frac{2P_0V_0}{12P_0V_0 + 4P_0V_0} = \frac{1}{8} = 12,5\%. \quad (19)$$

3.2.4 Процесс, в котором давление возрастает пропорционально объему можно реализовать в сосуде с подвижным поршнем, если поршень прикреплен ко дну сосуда пружиной. Если пренебречь длиной пружины в недеформированном состоянии и внешним давлением, то процесс расширения газа будет описываться уравнением (12).