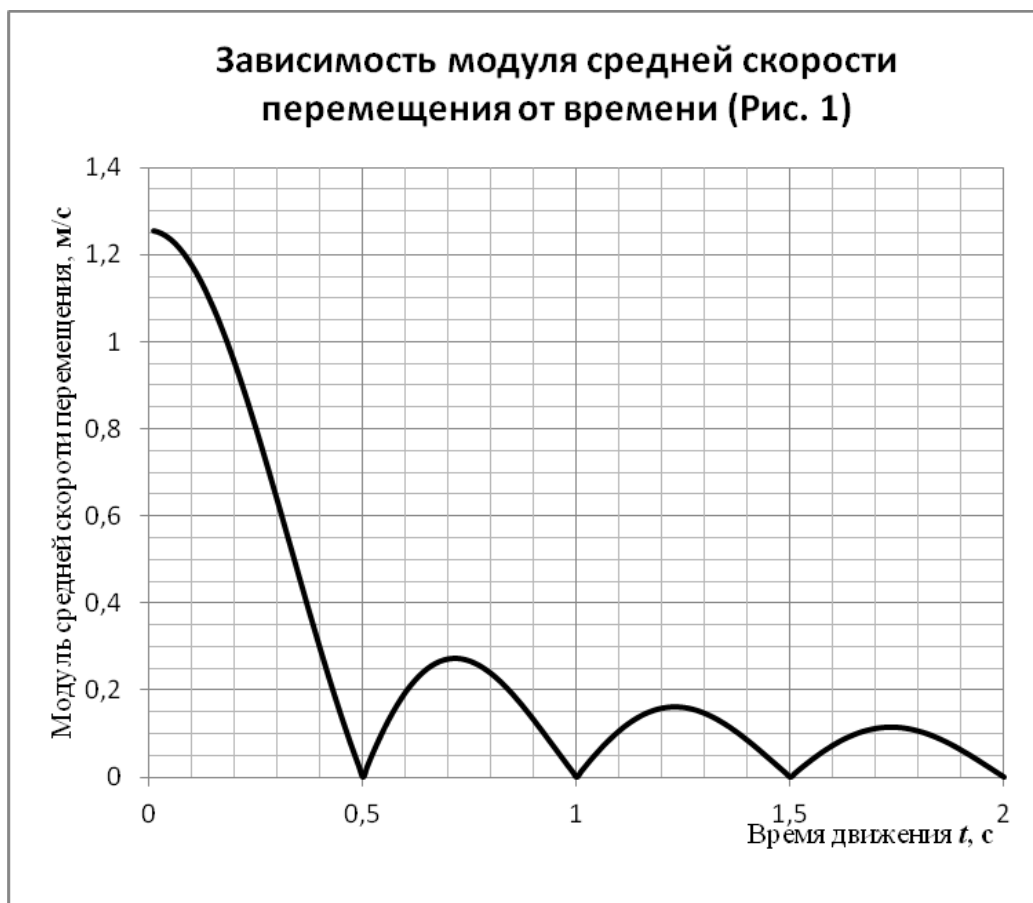


Условие

Задание 2. Средние скорости.

На рисунках приведены графики зависимостей модулей средних скоростей перемещений точки на ободе колеса от времени движения для трех видов движений. Средняя скорость определяется для промежутков времени от начала отсчета времени до текущего его значения.

2.1. На рисунке 1 приведен график зависимости $\langle v_1(t) \rangle$ точки на ободе колеса в случае, когда колесо вращается вокруг закрепленной оси. Пользуясь графиком, определите:



2.1.1. Период T_1 вращения колеса;

2.1.2. Формулу зависимости $\langle v_1(t) \rangle$;

2.1.3. Радиус R колеса.

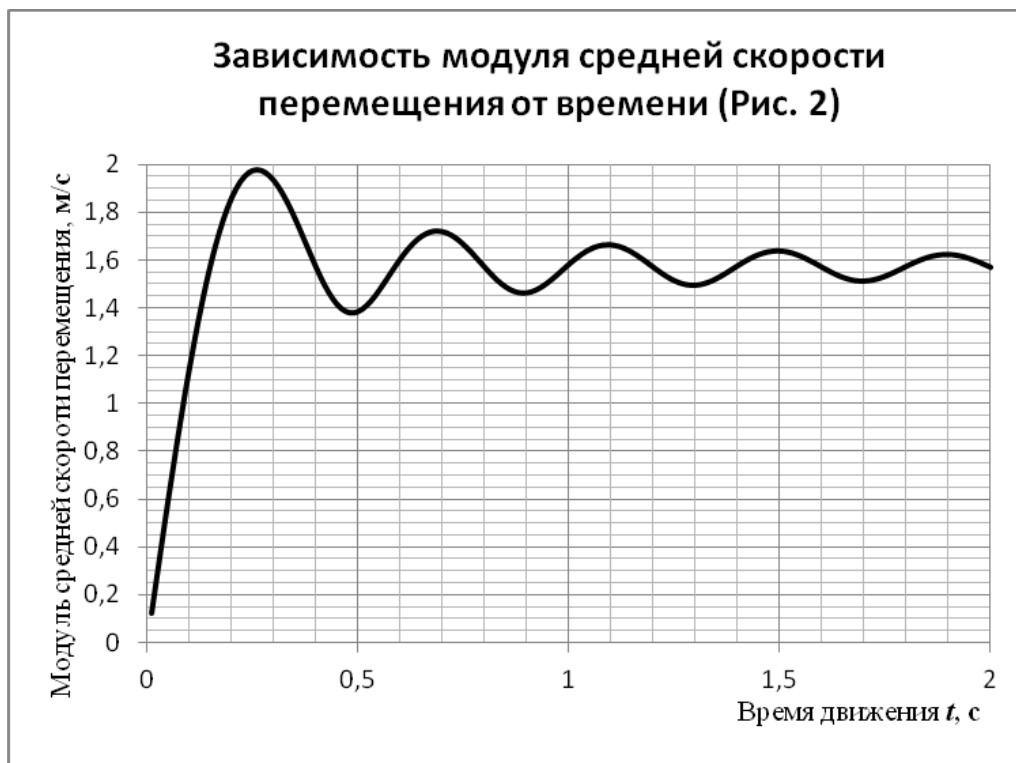
Подсказка из математики. Предельное значение отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ равно 1. В общепринятой записи: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2.2. На рисунке 2 приведен график зависимости $\langle v_2(t) \rangle$ точки на ободе колеса в случае, когда колесо катится равномерно по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Радиус R колеса не изменился. Пользуясь графиком, определите:

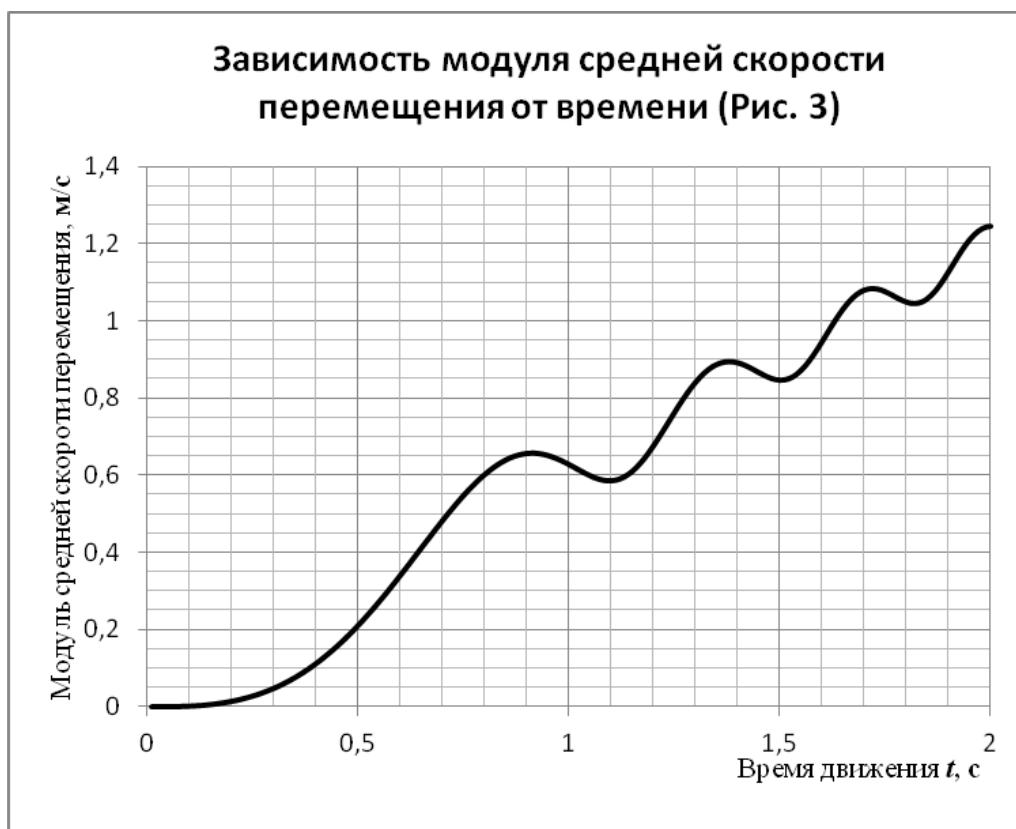
2.2.1. Период T_2 вращения колеса;

2.2.2. Модуль скорости u поступательного движения колеса;

2.2.3. Формулу зависимости $\langle v_2(t) \rangle$.



2.3. На рисунке 3 приведен график зависимости $\langle v_3(t) \rangle$ точки на ободе колеса в случае, когда колесо катится равноускоренно по горизонтальной поверхности без проскальзывания из состояния покоя. Радиус R колеса не изменился. Пользуясь графиком, определите:



2.3.1. Модуль ускорения a поступательного движения колеса.

2.3.2. Формулу зависимости $\langle v_3(t) \rangle$.

Решение

Задание 2. Средние скорости.

2.1.1. Модуль средней скорости: $\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t}$. Когда точка проходит через первоначальное положение, $\Delta r = 0 \Rightarrow \langle v \rangle = 0$. Период вращения – это промежуток времени между двумя последовательными обращениями в ноль средней скорости. На рисунке это $T = 0,5$ с.

2.1.2. Рассмотрим поворот колеса на угол $\varphi = \frac{2\pi}{T}t$.

Модуль перемещения за это время (см. рисунок 4):

$$\Delta r = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \Delta r = 2R \sin \frac{\pi t}{T} \Rightarrow$$

$$\langle v \rangle = 2 \frac{R}{t} \sin \frac{\pi t}{T}. \quad (1)$$

2.1.3. Умножим числитель и знаменатель выражения для $\langle v \rangle$ на $\frac{\pi}{T}$: $\langle v \rangle = \frac{\frac{\pi}{T} 2R \sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$. При

10 класс. Теоретический тур.

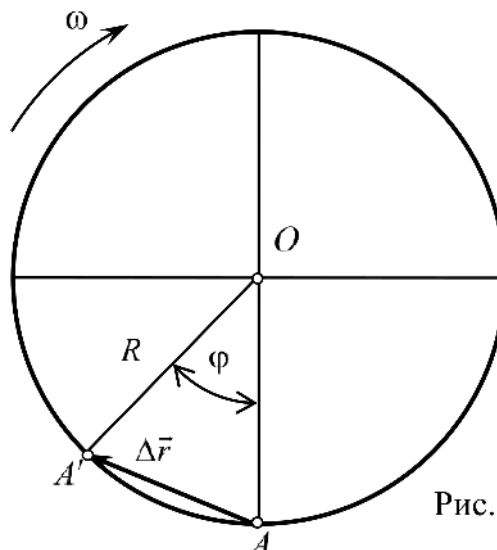


Рис. 4

$t \rightarrow 0$ получим: $\langle v \rangle = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R = \frac{\langle v \rangle T}{2\pi}$ Из

графика при $t = 0$ $\langle v \rangle = 1,25 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow R = \frac{1,25 \cdot 0,5}{2\pi} = 0,1 \text{м}$.

2.2.1. Минимумы на графике соответствуют моментам касания точки поверхности земли.

Промежуток времени между двумя последовательными касаниями равен периоду вращения колеса. Из графика: $T = 0,4 \text{с}$.

2.2.2. Если колесо не проскальзывает на дороге, модуль линейной скорости вращения колеса равен модулю поступательного движения колеса, поэтому $u = \frac{2\pi R}{T} = 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

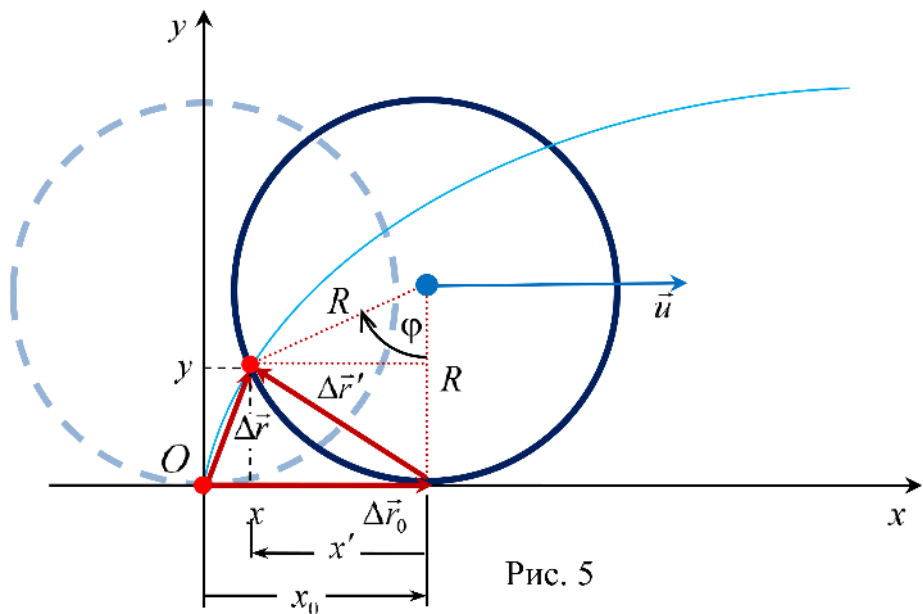


Рис. 5

2.2.3. Положение точки на ободе колеса может быть определено относительно неподвижной системы отсчета, связанной с поверхностью, и относительно колеса, которое является движущейся системой отсчета. Перемещения относительно этих систем отсчета связаны законом сложения перемещений:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{r}'.$$

Здесь $\Delta \vec{r}$ — перемещение точки относительно неподвижной поверхности; $\Delta \vec{r}'$ — перемещение точки относительно колеса; $\Delta \vec{r}_0$ — перемещение колеса относительно поверхности (см. рис. 5).

В проекциях на оси координат (см. рис. 5):

$$x = x_0 - x', \quad x_0 = ut, \quad x' = R \sin \varphi; \quad y = y', \quad y' = R - R \cos \varphi.$$

Угол $\varphi = \omega t$, где $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{u}{R}$ — угловая скорость вращения колеса. Окончательно:

$$\begin{cases} x = ut - R \sin \frac{ut}{R} \\ y = R \left(1 - \cos \frac{ut}{R} \right) \end{cases}, \quad \Delta r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \Delta r = \sqrt{\left(ut - R \sin \frac{ut}{R} \right)^2 + \left(R \left(1 - \cos \frac{ut}{R} \right) \right)^2} \Rightarrow$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t} = \frac{R}{t} \sqrt{\frac{ut}{R} \left(\frac{ut}{R} - 2 \sin \frac{ut}{R} \right) + 2 \left(1 - \cos \frac{ut}{R} \right)}.$$

График этой функции приведен на рисунке 2 в условии.

2.3.1. Отсчитаем на рисунке второй минимум на графике, так как время этого минимума $t_2 = 1,5$ с можно прочесть с достаточно высокой точностью. За время t_2 колесо совершило 2 полных оборота и прошло путь $s = 2 \cdot 2\pi R = 4\pi R$. Это расстояние равно $\frac{at_2^2}{2}$.

$$\text{В результате: } 4\pi R = \frac{at_2^2}{2} \Rightarrow a = \frac{8\pi R}{t_2^2} = \frac{8\pi \cdot 0,1}{1,5^2} = 1,12 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2.3.2. В формуле (2) для равномерного движения колеса произведение ut — это путь, пройденный колесом при равномерном движении. В данном случае его необходимо заменить на $\frac{at^2}{2}$ — путь при равноускоренном движении из состояния покоя. В результате:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t} = \frac{R}{t} \sqrt{\frac{at^2}{2R} \left(\frac{at^2}{2R} - 2 \sin \frac{at^2}{2R} \right) + 2 \left(1 - \cos \frac{at^2}{2R} \right)}. \quad (3)$$

График этой функции приведен на рисунке 3 в условии.