

Дутые аттракционы

Условие

Задание 1. Разминка.

Это задание состоит из 3 не связанных между собой задач.

Задача 1.1 «Дутые аттракционы»

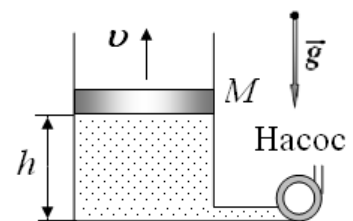


Детские надувные аттракционы (например, «Воздушный замок») представляют собой гибкие и эластичные сосуды «причудливых» форм и некоторого предельного объёма, в которые под давлением подаётся воздух. Для нормальной работы аттракциона давление воздуха в нем должно быть не очень большим (станет «твёрдым») и не очень маленьким (дети будут проваливаться). Электронасос обеспечивает подачу воздуха внутрь аттракциона в течение всего времени его работы.

Атмосферное давление $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па. Считайте, что газовые процессы являются изотермическими, молярная масса воздуха $M_B = 29$ г/моль. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Молярная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

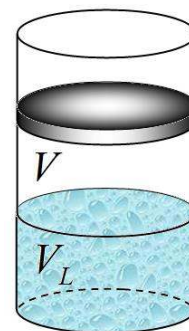
1.1.1 «Время накачки» Рассмотрим сравнительно небольшой аттракцион внутренний объём (вместимость) которого $V_1 = 1,0 \cdot 10^2$ м³, а рабочее давление воздуха внутри него $p_1 = 2,5 \cdot 10^5$ Па. Летним солнечным днём при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ механик Фёдя за час до начала работы аттракциона решил развернуть его и накачать до рабочего давления при помощи небольшого (автомобильного) поршневого электронасоса, имеющего объём всасывающей камеры $V_2 = 1,0 \cdot 10^3$ см³. Поршень насоса делает $N = 10$ качаний (полных ходов) за секунду. Найдите массу m_B воздуха, необходимого для работы аттракциона. Успеет ли Фёдя к открытию аттракциона?

1.1.2 «Скорость накачки» В процессе медленной накачки надувной аттракцион медленно приподнимается и расправляется до необходимого размера. Будем считать, что в процессе накачки аттракцион можно представить в виде тонкостенного цилиндра площади поперечного сечения $S = 5,0$ м², в котором может без трения перемещаться тяжёлый горизонтальный поршень массы $M = 500$ кг (т.е. «Воздушный замок»). Найдите зависимость высоты h подъёма поршня от времени t накачки. Постройте график полученной зависимости $h(t)$. Найдите скорость v движения поршня при работе насоса. Мощный насос имеет объём всасывающей камеры $V_3 = 1,0 \cdot 10^4$ см³. Поршень насоса делает $N = 10$ качаний (полных ходов) за секунду.



Задача 1.2 «Газировка»

В высоком цилиндрическом сосуде находится газированная вода – вода насыщенная углекислым газом. Сосуд закрыт подвижным поршнем. Когда поршень примыкает к поверхности жидкости давление в сосуде равно P_0 .



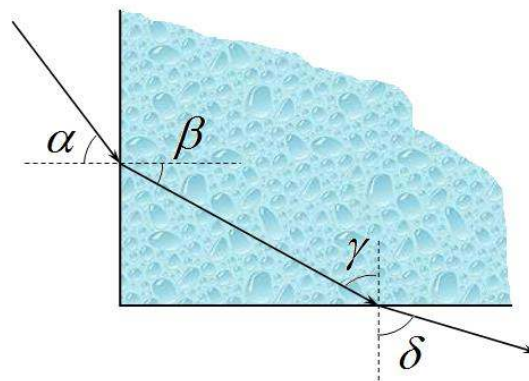
Известно, что объем, который бы занимал углекислый газ (будучи в газообразном состоянии), содержащийся в газировке при давлении P_0 равен V_0 . Поршень начинают медленно приподнимать. Найдите зависимость давления газа в сосуде от его объема V . Объем жидкости в сосуде V_L считайте неизменным, температура также остается постоянной. Постройте точный

график (с оцифровкой осей) полученной зависимости (подберите для этого соответствующие относительные переменные).

Подсказка: растворимость газа в жидкости пропорциональна внешнему давлению (закон Генри). Растворимость – количество газа (в молях), растворенного в единице объема насыщенного раствора.

Задача 1.3 «Водяной куб»

На боковую грань водяного куба падает луч света под углом α к нормали (на рис. вид сверху). Угол преломления β является функцией от угла падения $\beta = f(\alpha)$, график которой показан на отдельном бланке. Затем это луч попадает на перпендикулярную грань куба под некоторым углом γ к нормали этой грани, и после преломления на ней выходит из куба под углом δ . Ваша основная задача – разработать графический метод нахождения угла δ , используя график зависимости $\beta = f(\alpha)$. Для этого на выданном бланке вам необходимо провести дополнительные построения.



1.3.1 Отметьте на графике значение угла $\alpha = 80^\circ$. По-

следовательно укажите на графике и запишите численные значения углов β , γ и δ .

1.3.2 Найдите значение угла δ при угле падения $\alpha = 62^\circ$.

1.3.3 Укажите диапазон углов α , при котором луч выйдет через перпендикулярную грань.

Решение

Задание 1. Разминка.

Задача 1.1 «Дутые аттракционы»

1.1.1 «Время накачки» За одно качание насос захватывает из атмосферы массу m_1 воздуха, попавшую в его открытую засасывающую камеру объемом V_2 при атмосферном давлении p_0 . Из уравнения состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева получим

$$p_0 V_2 = \frac{m_1}{M_B} RT \Rightarrow m_1 = \frac{p_0 V_2 M_B}{RT}. \quad (1)$$

Для нормальной работы аттракциона необходима масса воздуха m_B

$$p_1 V_1 = \frac{m_B}{M_B} RT \Rightarrow m_B = \frac{p_1 V_1 M_B}{RT} = 291 \text{ кг}. \quad (2)$$

Как видим из (2), масса воздуха в аттракционе представляет собой достаточно значительную величину, для закачки которой скорее всего потребуется значительное время.

Поскольку насос равномерно (по массе) закачивает воздух, то механику Феде потребуется время для полной накачки

$$m_2 = m_1 N t \Rightarrow t = \frac{m_2}{N m_1} = \frac{p_1 V_1}{N p_0 V_2} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ с} = 417 \text{ мин} = 6,9 \text{ ч}. \quad (3)$$

Как следует из (3) механик Федя никак не успеет к открытию аттракциона – нужно всё делать загодя (или поменять насос!). Действительно, таким насосом необходимо накачивать практически целый рабочий день, поскольку он рассчитан на обслуживание небольшого объема камеры автомобиля ($V_3 \approx 60 \text{ л}$). Справедливости ради заметим, что все надувные аттракционы непрерывно подкачиваются в течение рабочего дня для компенсации утечки воздуха.

1.1.2 «Скорость накачки» Будем считать, что в процессе накачки поршень поднимается равномерно (т.е. находится в состоянии равновесия). Тогда давление под ним остаётся постоянным и равным

$$p(h) = p_0 + \frac{Mg}{S} = \text{const}, \quad (4)$$

что соответствует изобарному процессу.

Согласно уравнению Клапейрона - Менделеева можем записать

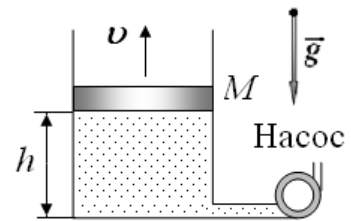
$$pV = \left(p_0 + \frac{Mg}{S} \right) Sh = \frac{m}{M_B} RT. \quad (5)$$

Для высоты h поршня от массы закачанного газа m получаем выражение

$$h = \frac{m}{M_B} \frac{RT}{p_0 S + Mg} \Rightarrow h \sim m. \quad (6)$$

Согласно (6) высота поднятия поршня прямо пропорциональна массе закачанного в цилиндр газа.

Согласно (3) через насос за время t пройдет масса воздуха



$$m(t) = m_1 N t = \frac{p_0 V_2 M_B}{RT} N \cdot t \Rightarrow m \sim t. \quad (7)$$

Следовательно, зависимость высоты h поднятия поршня от времени t при накачке имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{M_B} \frac{RT}{p_0 S + Mg} \frac{p_0 V_2 M_B}{RT} N \cdot t = \frac{p_0 V_2 N}{p_0 S + Mg} \cdot t. \quad (8)$$

График полученной зависимости – прямая пропорциональность, поскольку

$$h(t) \sim t. \quad (9)$$

Из выражения (8) следует, что скорость движения поршня вверх равна коэффициенту пропорциональности в данной формуле

$$v = \frac{p_0 V_2 N}{p_0 S + Mg} = 2,0 \frac{\text{см}}{\text{с}}. \quad (10)$$

Задача 1.2 «Газировка»

Количество газа, растворенного в воде, находится по формуле

$$\nu_0 = g V_L P_0, \quad (1)$$

где обозначено g - растворимость углекислого газа в воде при данной температуре. Если бы весь этот углекислый газ находился в газообразном состоянии, то он бы занимал объем, равный

$$P_0 V_0 = \nu_0 R T = g V_L P_0 R T \Rightarrow V_0 = \nu_0 R T = g V_L R T \quad (2)$$

Пусть объем газа под поршнем стал равным V , а его давление - P . При этом давлении количество растворенного газа равно

$$\nu_1 = g V_L P. \quad (3)$$

Следовательно, в газообразном состоянии находится

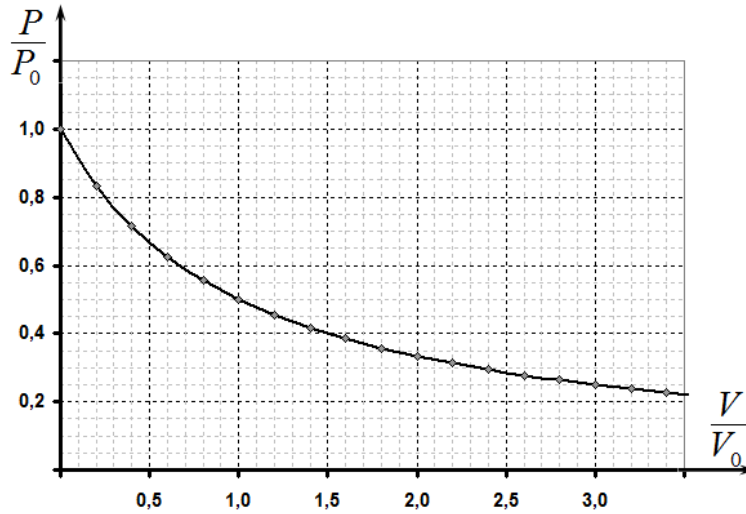
$$\nu = \nu_0 - \nu_1 = g V_L (P_0 - P) \quad (4)$$

молей углекислого газа. Для определения давления этого газа следует решить уравнение Менделеева-Клапейрона

$$PV = \nu RT = gV_L (P_0 - P) RT . \quad (5)$$

Из которого следует

$$P = \frac{gV_L RT}{V + gV_L RT} P_0 . \quad (6)$$



Учитывая формулу (2), это выражение можно представить в виде

$$P = \frac{P_0}{\frac{V}{V_0} + 1} . \quad (7)$$

Точный график можно построить в координатах $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0} \right)$ см. рисунок.

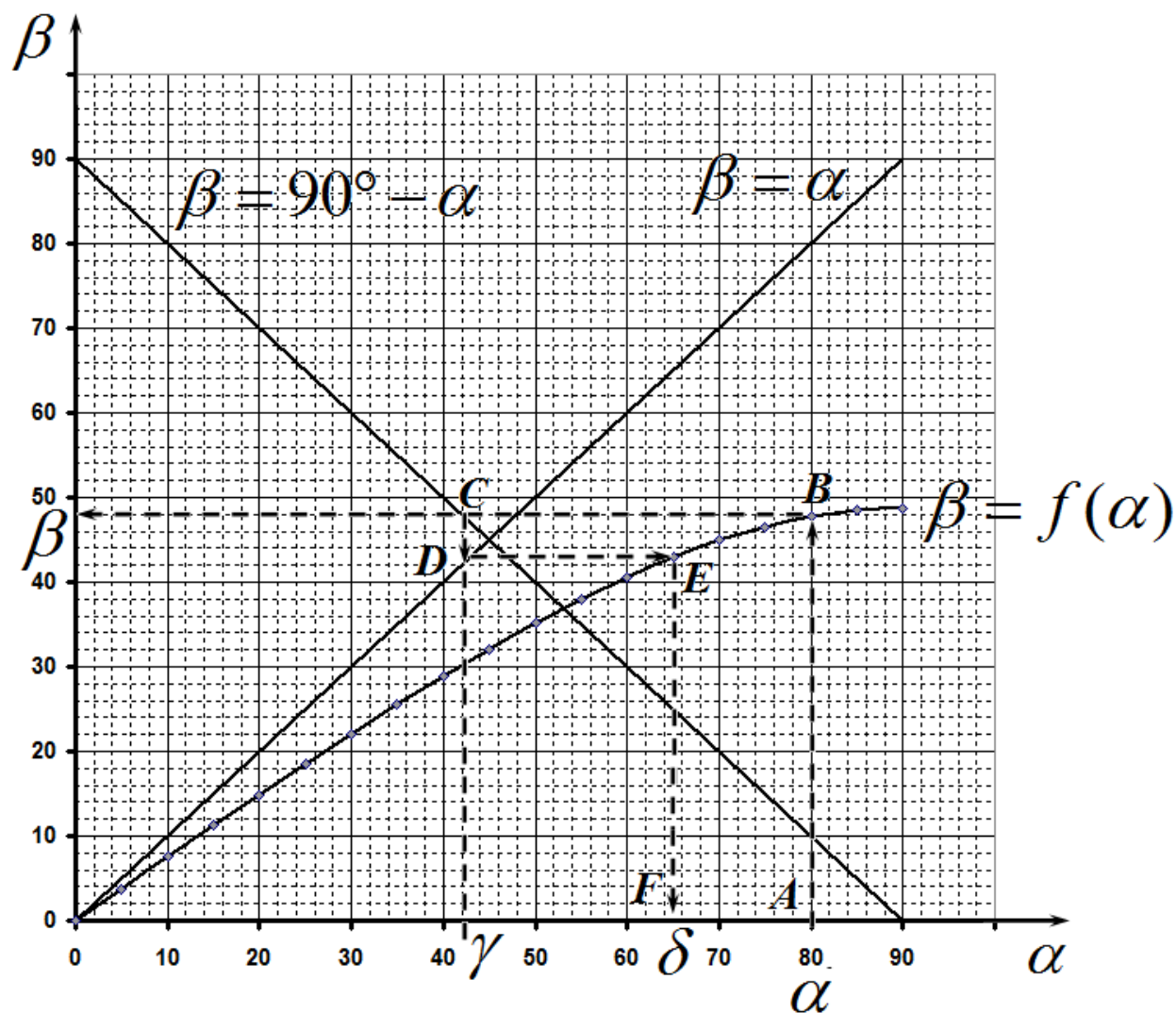
Задача 1.3 «Водяной куб»

Непосредственно из рисунка, отражающего ход лучей, следует что

$$\gamma = 90^\circ - \beta \quad (1)$$

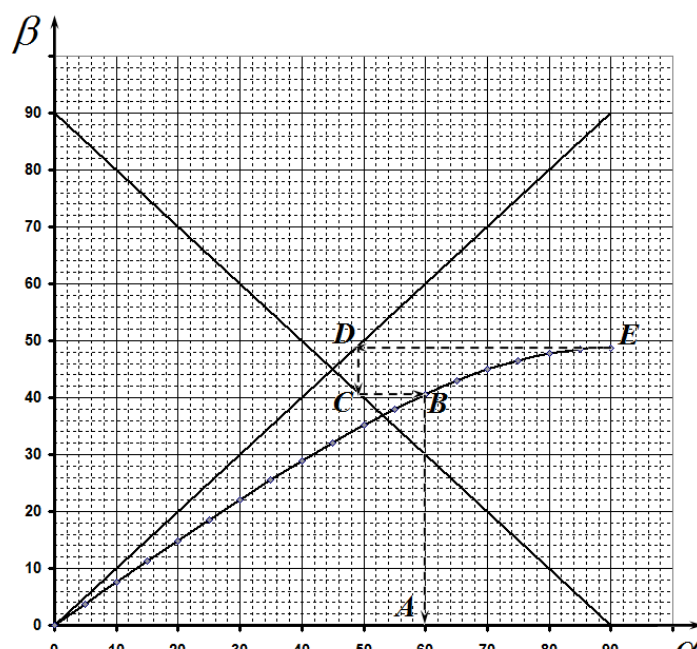
Поэтому на графике построим прямую, описываемую функцией $\beta = 90^\circ - \alpha$. Также построим прямую, описываемую выражением $\beta = \alpha$.

1.3.1



Последовательность графического решения задачи следующая:

- от точки A ($\alpha = 80^\circ$) проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $\beta = f(\alpha)$ (точка B), её ордината равна углу β (по графику находим $\beta \approx 48^\circ$);
- от точки B проводим горизонтальную прямую до пресечения с прямой $\beta = 90^\circ - \alpha$, (точка C), её абсцисса равна углу γ (по графику находим $\gamma \approx 42^\circ$);
- от точки C проводим вертикальную прямую до пересечения с прямой $\beta = \alpha$ (точка D), её ордината также равна γ ;
- наконец, от точки D проводим горизонтальную прямую до пересечения с заданной функцией $\beta = f(\alpha)$



(точка E), её абсцисса и есть искомый угол $\delta = f^{-1}(\gamma)$; здесь f^{-1} - обозначена обратная функция. По графику находим $\delta \approx 65^\circ$.

1.3.2 Аналогичная процедура для начального значения $\alpha = 62^\circ$ приводит к значению $\delta \approx 80^\circ$.

1.3.3 Из графика зависимости $\beta = f(\alpha)$ видно, что максимальное значение угла преломления равно $\beta_{\max} = 49^\circ$. Для нахождения соответствующего значения угла падения α необходимо от «конечной точки E (координатами $(90^\circ, 49^\circ)$)» проделать обратный путь $EDCBA$, который приводит к значению $\alpha_{\min} \approx 60^\circ$. При меньших углах падения решения задачи не существует, это означает, что на второй грани луч полностью отразится. Таким образом, диапазон углов, при которых луч выйдет через вторую грань $60^\circ < \alpha < 90^\circ$.