

Условие

Задача 2. Сжимаемая жидкость

Во многих случаях воду и другие жидкости можно считать не сжимаемыми. Однако в реальности при увеличении давления объем воды уменьшается, а ее плотность возрастает.

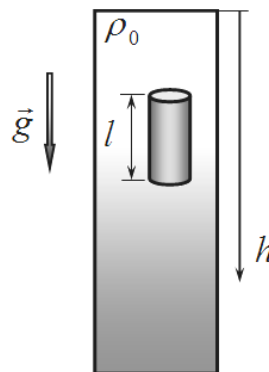
В вертикальном, очень глубоком сосуде находится жидкость, плотность ρ которой возрастает с глубиной h по закону

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{h}{h_0} \right), \quad (1)$$

где ρ_0 — плотность жидкости на поверхности, h_0 — некоторая постоянная величина.

1.1 Укажите размерность и физический смысл величины h_0 .

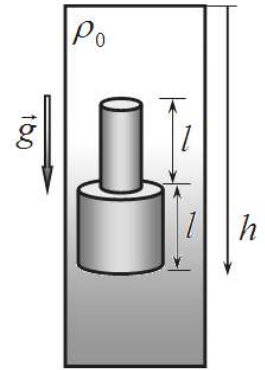
1.2 Постройте график зависимости плотности жидкости от глубины. Какой смысл имеет площадь под этим графиком?



1.3 Найдите зависимость гидростатического давления P в сосуде от глубины h .

Под гидростатическим давлением понимается разность между давлением на глубине h и атмосферным давлением на поверхности.

1.4 В сосуд опускают вертикально небольшой однородный цилиндр высотой l ($l \ll h_0$), изготовленный из материала с плотностью $\rho_1 = \frac{3}{2}\rho_0$. На какой глубине остановится этот цилиндр (его середина)?



1.5 В сосуд опускают вертикально тело, состоящее из двух однородных цилиндров, изготовленных из того же материала, что и в п.1.4. Высоты каждого из цилиндров равны l , радиус нижнего в два раза больше радиуса верхнего. На какой глубине окажется место стыка цилиндров, когда это тело окажется в жидкости в состоянии равновесия? Тело полностью погружается в жидкость.

1.6 Найдите глубину погружения (по его середине) этого же тела, если его опустить меньшим цилиндром вниз.

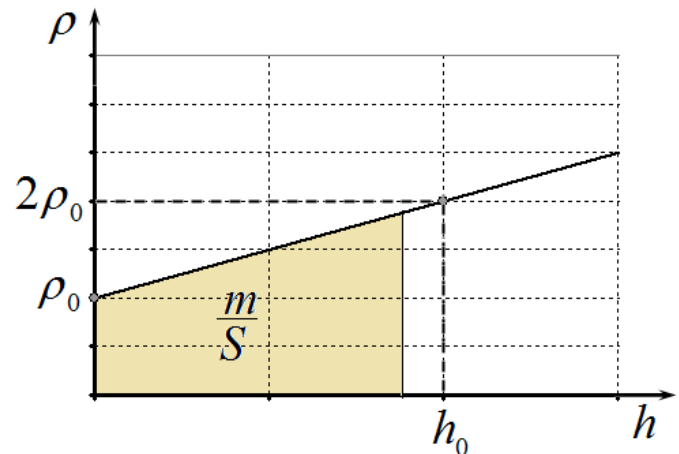
Решение

Задача 9-2. Сжимаемая жидкость

1.1 Как следует из формулы

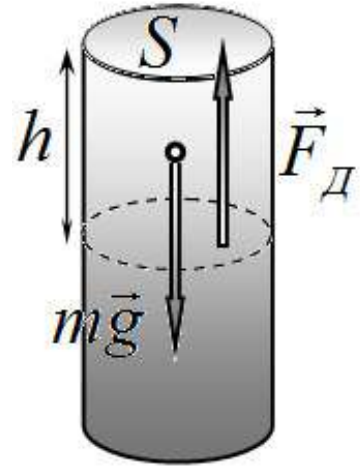
$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{h}{h_0} \right), \quad (1)$$

Величина h_0 имеет размерность длины. На глубине $h = h_0$ плотность жидкости удваивается, т.е. $\rho(h) = 2\rho_0$.



1.2 Зависимости плотности жидкости от глубины линейна, поэтому ее график – прямая линия, показанная на рисунке. Площадь под графиком имеет смысл массы жидкости находящейся над площадкой единичной площади. Действительно, для слоя малой толщины

$$\Delta S = \rho \Delta h = \frac{\rho S \Delta h}{S} = \frac{\Delta m}{S}. \quad (2)$$



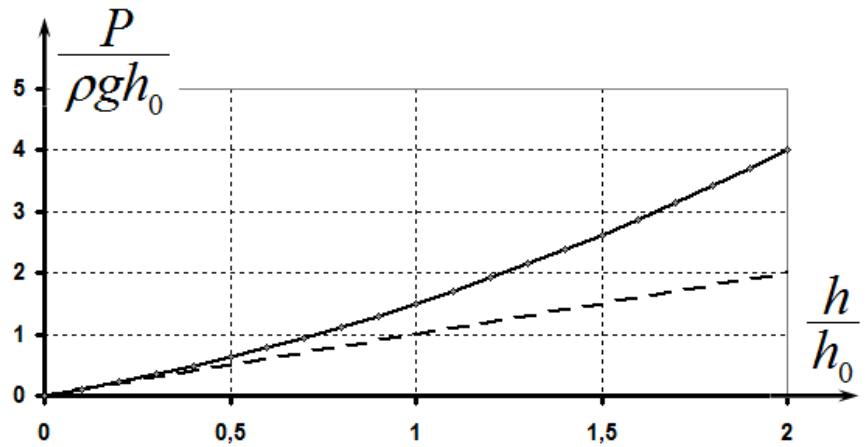
1.3 Рассмотрим цилиндрический столб жидкости высотой h , верхняя грань которого находится на поверхности. Так как этот столб находится в равновесии, то сила тяжести, действующая на этот столб, уравнивается силой давления со стороны нижележащего слоя жидкости:

$$mg = PS. \quad (3)$$

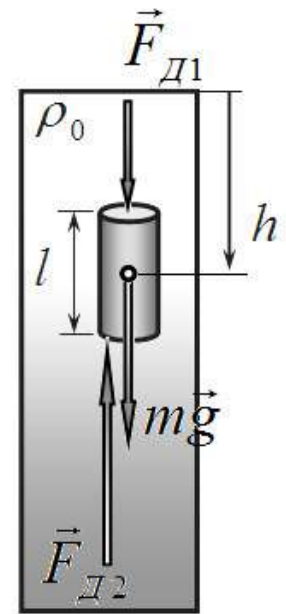
Здесь m - масса выделенного столба, которая может быть найдена как площадь под графиком зависимости $\rho(h)$. Следовательно,

$$P(h) = \frac{m}{S}g = \frac{\rho_0 + \rho_0 \left(1 + \frac{h}{h_0}\right)}{2}hg = \rho_0 gh \left(1 + \frac{h}{2h_0}\right) \quad (4)$$

Как следует из полученного выражения – давление возрастает по квадратичному закону.



Для иллюстрации (от учащихся данный график не требуется) на рисунке показан график этой зависимости. Пунктиром показана аналогичная зависимость для жидкости постоянной плотности.



1.4 В положении равновесия сила тяжести, действующая на цилиндр, уравнивается разностью сил давления на нижнее и верхнее основания цилиндра:

$$mg = F_{Д2} - F_{Д1} = \left(P\left(h + \frac{l}{2}\right) - P\left(h - \frac{l}{2}\right) \right) S. \quad (5)$$

Подставляя выражения для массы цилиндра и давлений на разных глубинах, получим уравнение для определения искомой глубины:

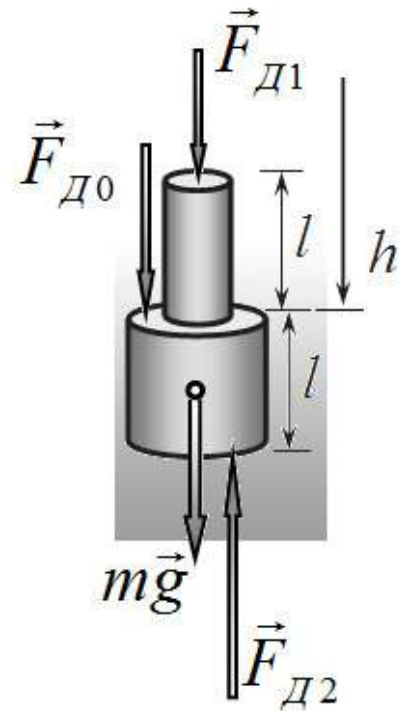
$$\frac{3}{2}\rho_0 S l g = \rho_0 g S \left(\left(h + \frac{l}{2}\right) \left(1 + \frac{h + l/2}{2h_0}\right) - \left(h - \frac{l}{2}\right) \left(1 + \frac{h - l/2}{2h_0}\right) \right) \quad (4)$$

Решение этого уравнения не представляет проблем:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\rho_0 S l g &= \rho_0 g S \left((h + l/2) \left(1 + \frac{h + l/2}{2h_0} \right) - (h - l/2) \left(1 + \frac{h - l/2}{2h_0} \right) \right) \Rightarrow \\ \frac{3}{2}l &= (h + l/2) - (h - l/2) + \frac{(h + l/2)^2 - (h - l/2)^2}{2h_0} \Rightarrow \\ \frac{3}{2}l &= l + \frac{2hl}{2h_0} \Rightarrow h = \frac{h_0}{2}\end{aligned}\quad (5)$$

Не сложно показать, что это положение равновесия является устойчивым, поэтому цилиндр действительно остановится на этой глубине.

Отметим, что на этой глубине плотность жидкости (см. формулу (1)) равна плотности материала цилиндра. Эта идея также может послужить основной идеей решения данной задачи.



1.5 Для описанного тела условие его равновесия имеет вид (см. рис.)

$$mg = F_{D2} - F_{D0} - F_{D1}. \quad (6)$$

Воспользуемся формулой для давления на разных глубинах, а также формулой для массы тела, в результате получим уравнение:

$$\frac{3}{2}\rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) =$$

$$= (4\pi R^2 \cdot P(h+l) - 3\pi R^2 \cdot P(h) - \pi R^2 \cdot P(h-l)) \quad (6)$$

Решение это уравнение не сложно, но достаточно громоздко:

$$\frac{3}{2}\rho_0 g(\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) = (4\pi R^2 \cdot P(h+l) - 3\pi R^2 \cdot P(h) - \pi R^2 \cdot P(h-l)) \Rightarrow$$

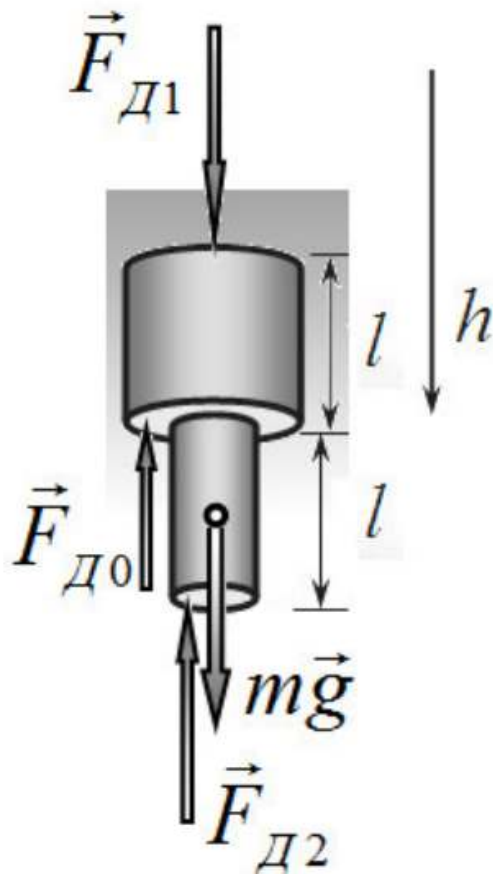
$$\frac{15}{2}\rho_0 g l = 4P(h+l) - 3P(h) - P(h-l) \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2}\rho_0 g l = \rho_0 g \left(4(h+l) \left(1 + \frac{h+l}{2h_0} \right) - 3h \left(1 + \frac{h}{2h_0} \right) - (h-l) \left(1 + \frac{h-l}{2h_0} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2}l = 4(h+l) - 3h - (h-l) + \frac{4(h+l)^2 - 3h^2 - (h-l)^2}{2h_0} \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2}l = 5l + \frac{8hl + 4l^2 + 2hl - l^2}{2h_0} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2}l = \frac{10hl + 3l^2}{2h_0} \Rightarrow h = \frac{5h_0 - 3l}{10} = \frac{h_0}{2} - \frac{3}{10}l$$



Условие равновесия:

$$mg = F_{Д2} + F_{Д0} - F_{Д1}. \quad (7)$$

Уравнение для определения глубины:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) = \\ = (\pi R^2 \cdot P(h+l) + 3\pi R^2 \cdot P(h) - 4\pi R^2 \cdot P(h-l)) \end{aligned} \quad (8)$$

Его решение:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) &= (\pi R^2 \cdot P(h+l) + 3\pi R^2 \cdot P(h) - 4\pi R^2 \cdot P(h-l)) \\ \frac{15}{2}\rho_0 g l &= P(h+l) + 3P(h) - 4P(h-l) \Rightarrow \\ \frac{15}{2}\rho_0 g l &= \rho_0 g \left((h+l) \left(1 + \frac{h+l}{2h_0} \right) + 3h \left(1 + \frac{h}{2h_0} \right) - 4(h-l) \left(1 + \frac{h-l}{2h_0} \right) \right) \Rightarrow \\ \frac{15}{2}l &= (h+l) + 3h - 4(h-l) + \frac{(h+l)^2 + 3h^2 - 4(h-l)^2}{2h_0} \Rightarrow \\ \frac{15}{2}l &= 5l + \frac{2hl + l^2 + 8hl - 4l^2}{2h_0} \Rightarrow \\ \frac{5}{2}l &= \frac{10hl - 3l^2}{2h_0} \Rightarrow h = \frac{5h_0 + 3l}{10} = \frac{h_0}{2} + \frac{3}{10}l \end{aligned}$$