

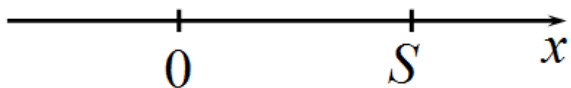
Условие

Задача 1. Разгон

Перед переездом на пустынной дороге стоит автомобиль. На светофоре указано, что переезд откроется через τ секунд. Водителю необходимо попасть в точку, находящуюся на расстоянии S за переездом за минимальное время.

Введем ось Ox , направленную вдоль дороги, начало отсчета совместим с переездом. Автомобиль можно считать материальной точкой. Формально: при $t = 0$, координата автомобиля $x = 0$ и его скорость $v_x = 0$.

Считайте, что автомобиль может двигаться только с постоянным по модулю ускорением a (при движении в любую сторону, при разгоне и при торможении). Такая ситуация возможна в сильный гололед. Расстояние $S = \frac{a\tau^2}{2}$.



Часть 1. Примитивное решение.

Водитель ожидает открытия переезда и затем начинает двигаться с постоянным ускорением a . Найдите момент времени t_1 , когда автомобиль окажется в нужной точке при таком плане движения. Постройте графики зависимости проекции скорости автомобиля v_x и его координаты x от времени.

Примечание: Здесь и далее рекомендуем построить графики зависимостей относительных величин $v'_x = \frac{v_x}{a\tau}$ и $x' = \frac{x}{a\tau^2}$ от величины $t' = \frac{t}{\tau}$. В этом случае вы сможете точно оцифровать оси графика.

Часть 2. Умный лихач без тормозов.

Будем считать, что автомобиль может двигаться только с постоянным по модулю ускорением a (при движении в любую сторону, при разгоне и при торможении).

Определите закон движения автомобиля, при котором он достигнет нужной точки за минимальное время: постройте графики зависимости проекции скорости автомобиля v_x и его координаты x от времени в этом случае; найдите момент времени t_2 , когда автомобиль окажется в нужной точке в этом случае.

Часть 3. Умный лихач с тормозами.

Будем считать, что автомобиль может двигаться с постоянным по модулю ускорением a (при движении как вперед, так и назад), кроме того, он может резко, практически мгновенно затормозить (дорога сухая, автомобиль в полной исправности).

Определите закон движения автомобиля, при котором он достигнет нужной точки за минимальное время: постройте графики зависимости проекции скорости автомобиля v_x и его координаты x от времени в этом случае; найдите момент времени t_3 , когда автомобиль окажется в нужной точке в этом случае.

Решение

Задача 9-1. Разгон

Часть 1. Примитивное решение.

Решение этой части задачи также примитивно. Закон равноускоренного движения при нулевой начальной скорости имеет вид

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Полагая $x = S$, найдем промежуток времени Δt , которое требуется для достижения нужной точки:

$$S = \frac{a(\Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{a\tau^2}{2}} = \tau. \quad (2)$$

Чтобы найти момент времени, когда автомобиль окажется в нужной точке, к найденному интервалу времени следует прибавить время ожидания τ :

$$t_1 = \tau + \tau = 2\tau. \quad (3)$$

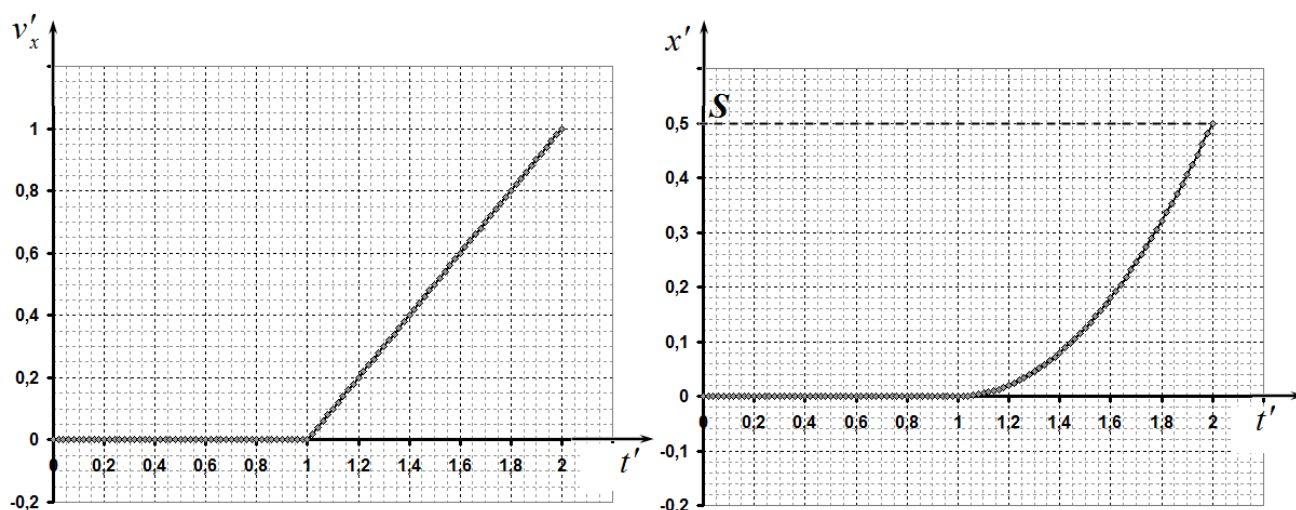
Для построения графиков следует записать законы изменения скорости и координаты от времени:

$$\text{при } t < \tau \quad \begin{cases} v_x = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \text{при } t > \tau \quad \begin{cases} v_x = a(t - \tau) \\ x = \frac{a(t - \tau)^2}{2} \end{cases} \quad (4)$$

При переходе к указанным относительным единицам данные выражения существенно упрощаются:

$$\text{при } t' < 1 \quad \begin{cases} v'_x = 0 \\ x' = 0 \end{cases}, \quad \text{при } t' > 1 \quad \begin{cases} v'_x = t' - 1 \\ x' = \frac{(t' - 1)^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Графики этих функций показаны на рисунке. Отметим, что расстояние до конечной точки в данной системе единиц равно $S' = 1/2$.

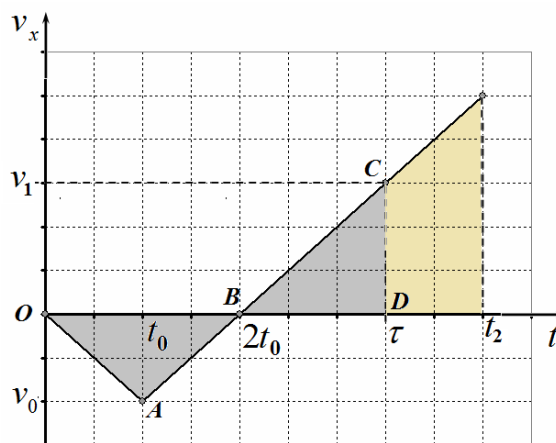


Часть 2. Умный лихач без тормозов.

Необходимой точки можно достичь быстрее! Для этого необходимо, чтобы к моменту открытия светофора автомобиль имел некоторую скорость, причем по возможности максимальную. То есть автомобилист может отъехать назад (в условии оговорено, что дорога пустая), а затем начать разгон с некоторой точки позади светофора.

Схематически такая «стратегия» показана на рисунке графика зависимости проекции скорости автомобиля от времени.

Итак: к моменту открытия светофора скорость автомобиля должна быть максимальной, следовательно, автомобиль должен отъехать как можно дальше, следовательно, он должен начать движение сразу! Кроме того, к моменту открытия светофора он должен находиться непосредственно перед светофором. На рисунке: в течение некоторого промежутка времени t_0 автомобиль движется назад с возрастающей по модулю скоростью (включена задняя скорость), после этого водитель включает переднюю скорость и начинает двигаться с положительным ускорением. Понятно, что к моменту времени $2t_0$ скорость автомобиля станет равным нулю (до этого момента он движется в обратном направлении с уменьшающейся по модулю скоростью). Наконец в течение интервала времени от $2t_0$ до τ автомобиль разгоняется. Для определения времени t_0 необходимо учесть, что к моменту времени τ координата автомобиля должна равняться нулю (т.е. он находится перед светофором). Из этого условия следует, что площади треугольников OAB



(которая численно равна расстоянию на которое автомобиль отъедет от светофора) и BCD должны быть равны! К моменту времени t_0 модуль скорости автомобиля равен $v_0 = at_0$, а к моменту времени τ скорость станет равной $v_1 = a(\tau - 2t_0)$. Следовательно, условия равенства площадей треугольников имеет вид

$$2t_0 \frac{at_0}{2} = \frac{a(\tau - 2t_0)^2}{2} \quad (6)$$

Решая это уравнение, находим момент времени переключения скорости t_0

$$2 \cdot \frac{at_0^2}{2} = \frac{a(\tau - 2t_0)^2}{2} \Rightarrow 2t_0^2 = (\tau - 2t_0)^2 \Rightarrow (\tau - 2t_0) = \pm \sqrt{2}t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\tau}{2 \pm \sqrt{2}} \quad (7)$$

Корень со знаком « - » больше τ , поэтому его следует отбросить. Таким образом, момент времени переключения скорости определяется формулой

$$t_0 = \frac{\tau}{2 + \sqrt{2}} \approx 0,29\tau. \quad (8)$$

Для определения момента времени достижения Нужной точки запишем уравнение равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью, начиная с момента времени $2t_0$:

$$x = \frac{a(t - 2t_0)^2}{2} \quad (9)$$

Полагая $x = S = \frac{a\tau^2}{2}$, находим искомое время:

$$\frac{a\tau^2}{2} = \frac{a(t_2 - 2t_0)^2}{2} \Rightarrow t_2 = \tau + 2t_0 = \tau + \frac{2\tau}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\tau \quad (9)$$

Численное значение этого времени $t_2 \approx 2,59\tau$.

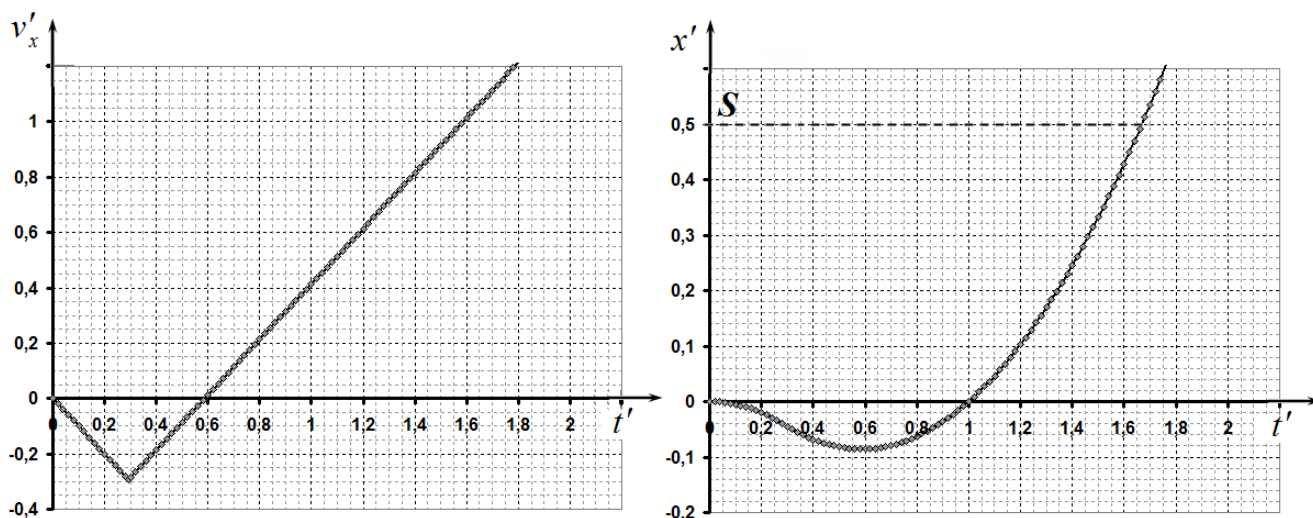
Законы движения данном случае выражаются функциями

$$npu \quad t < t_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = -at \\ x = -\frac{at^2}{2} \end{array} \right., \quad npu \quad t > t_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = -at_0 + a(t - t_0) = a(t - 2t_0) \\ x = -\frac{at_0^2}{2} + \frac{a(t - t_0)^2}{2} = \frac{at(t - 2t_0)}{2} \end{array} \right. \quad (10)$$

В приведенных единицах:

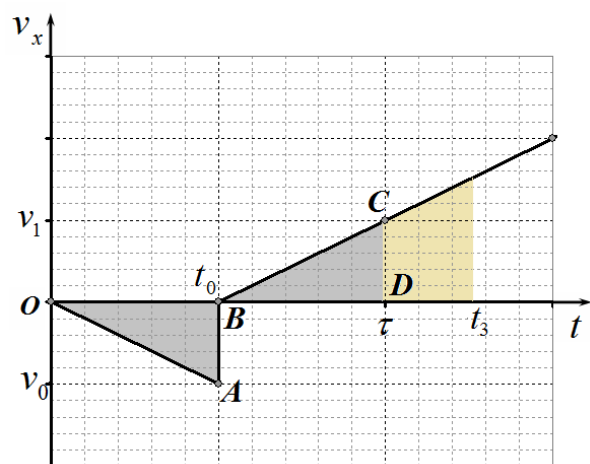
$$npu \quad t' < t'_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = -t' \\ x = -\frac{(t')^2}{2} \end{array} \right., \quad npu \quad t' > t'_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = (t' - 2t'_0) \\ x' = \frac{t'(t' - 2t'_0)}{2} \end{array} \right. \quad (11)$$

Графики этих функций показаны на рисунке



Часть 3. Умный лихач с тормозами.

В этом случае основная идея более быстрого достижения цели остается прежней – предварительно необходимо отъехать назад. Однако, при исправных тормозах можно отъехать подальше и, следовательно, разогнаться при подъезде к светофору до большей скорости. Сейчас «стратегия» движения изображается следующим графиком зависимости скорости от времени. В течение некоторого промежутка времени t_0 автомобиль отъезжает назад с максимальным ускорением, затем резко тормозит и начинает разгон. Так как к открытию светофора автомобиль должен находиться непосредственно перед ним, время движения назад должно быть равно времени приближения к светофору (площади треугольников OAB и BCD равны). Следовательно, $t_0 = \frac{\tau}{2}$. Теперь легко записать закон движения:



$$\text{при } t < \frac{\tau}{2} \begin{cases} v_x = -at \\ x = -\frac{at^2}{2} \end{cases}, \text{ при } t > \frac{\tau}{2} \begin{cases} v_x = a\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ x = \frac{a\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2}{2} \end{cases} \quad (10)$$

Время прибытия в конечный пункт находится из уравнения

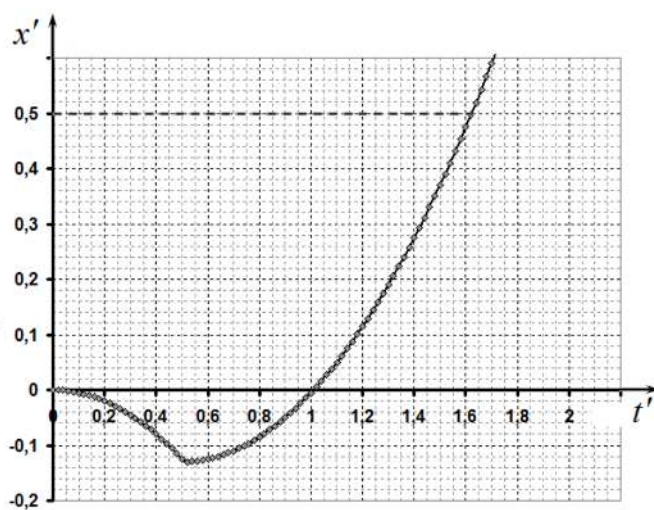
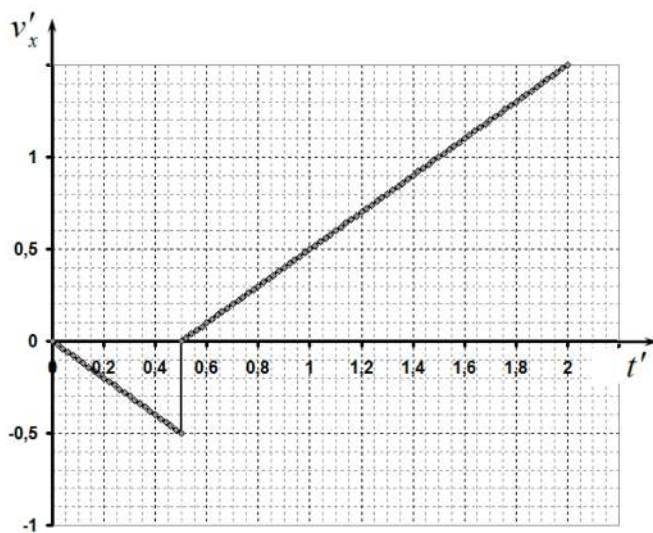
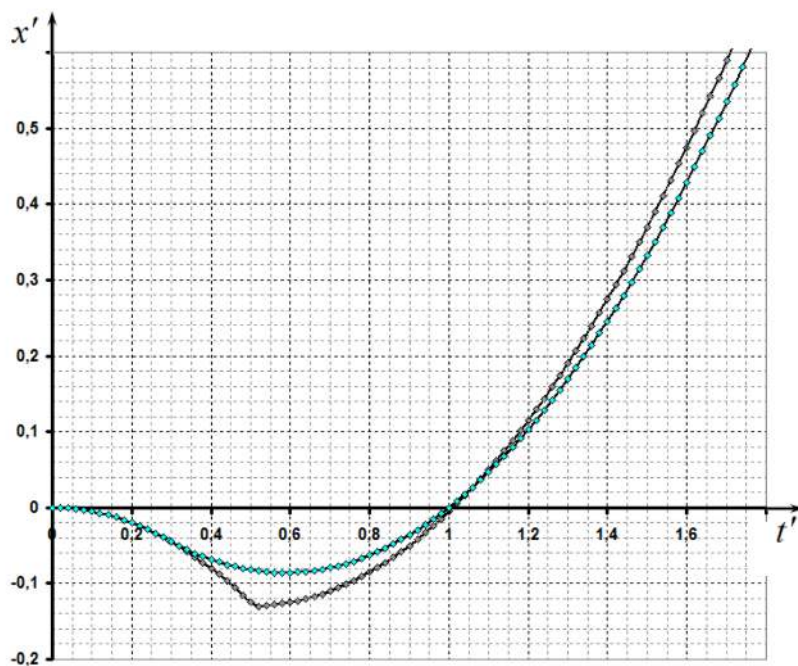
$$S = \frac{a\left(t_3 - \frac{\tau}{2}\right)^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} \Rightarrow t_3 = \frac{3}{2}\tau \quad (11)$$

Законы изменения скорости и координаты в приведенных единицах имеет вид

$$\text{при } t' < \frac{1}{2} \begin{cases} v'_x = -t' \\ x' = -\frac{(t')^2}{2} \end{cases}, \text{ при } t' > \frac{1}{2} \begin{cases} v_x = \left(t' - \frac{1}{2}\right) \\ x = \frac{\left(t' - \frac{1}{2}\right)^2}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Графики этих функций показаны на рисунке

Для сравнения на рисунке в одном масштабе показаны графики законов движения в двух случаях (без тормозов и с тормозами) .



Для сравнения на рисунке в одном масштабе показаны графики законов движения в двух случаях (без тормозов и с тормозами).