

Условие

Задача 2. «Деформация изгиба»

Приборы и оборудование: Пружинка от шариковой ручки, две палочки от шашлыка длиной 20 см, штатив с лапкой, секундомер, транспортир, нить с грузом.

В данной работе необходимо исследовать деформацию изгиба пружинки от шариковой ручки. Для проведения измерений в пружинку вставлены две одинаковые деревянные палочки (для шашлыка), так чтобы они своими концами почти касались внутри пружинки. Мерой деформации пружинки служит угол изгиба (измеренный в радианах) - γ . При изгибе возникает момент сил упругости, стремящийся выпрямить пружинку (см. рис. 1).

В соответствии с обобщенным законом Гука момент возвращающей силы должен быть пропорционален углу изгиба, т.е.

$$M = K\gamma, \quad (1)$$

где K - постоянный коэффициент упругости.

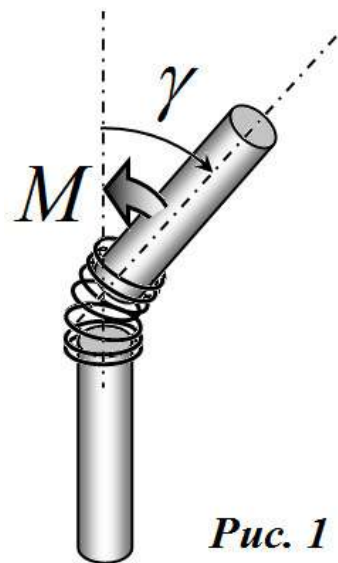


Рис. 1

Часть 1. Проверка закона Гука.

В данной части работы в качестве единицы момента силы используйте величину $M_0 = mgl/2$, где m, l - масса и длина палочки, $g = 9,8 \frac{м}{с^2}$ - ускорение свободного падения.

1.1 Не проводя никаких измерений (достаточно простых наблюдений), укажите, является ли коэффициент K в формуле (1) больше или меньше M_0 . Ответ обоснуйте.

Для экспериментальной проверки выполнимости закона Гука (1) предлагается использовать следующую установку (рис. 2). Одну из двух палочек (3) закрепите в лапке штатива (4). Вторая (2), прикрепленная к неподвижной палочке (3) с помощью исследуемой пружинки (1), может свободно колебаться. Для точного измерения углов используйте транспортир и отвес (5), привязанный к концу неподвижной палочки.

1.2 Измерьте зависимость угла изгиба γ (в состоянии равновесия) от угла наклона α неподвижной палочки от вертикали. Постройте график полученной зависимости.

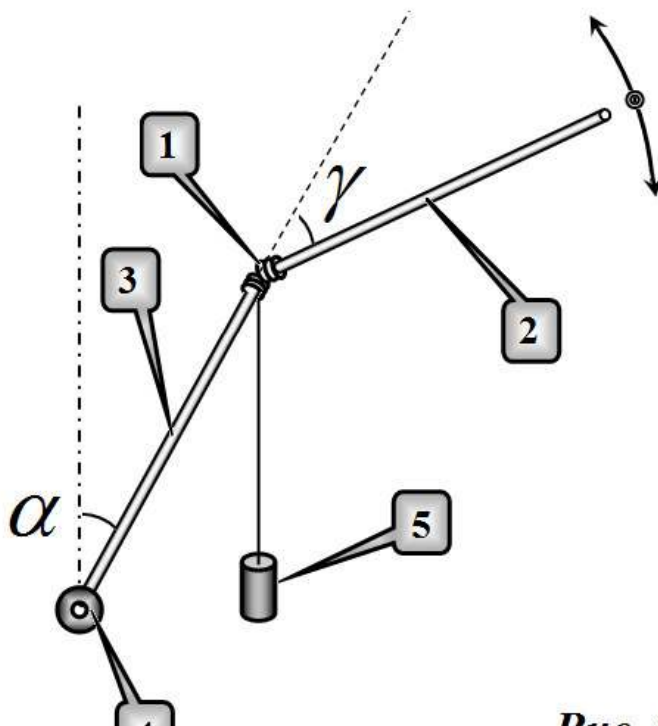


Рис. 2

1.3 Запишите условие равновесия палочки (2), считая уравнение (1) справедливым.

1.4 Используя полученные экспериментальные данные, постройте график зависимости M момента сил упругости, возникающего в пружинке, от угла изгиба γ .

1.5 Укажите, при каких углах изгиба γ закон Гука выполняется. Определите коэффициент упругости пружинки K . Оцените погрешность этой величины.

При использовании единицы измерения момента силы M_0 речь идет об определении величины $\tilde{K} = \frac{K}{M_0}$.

Часть 2. Колебания стержня.

В данной части задачи исследуются колебания подвижного стержня (2) при различных углах наклона α неподвижного стержня (3). Следите, чтобы колебания происходили в вертикальной плоскости.

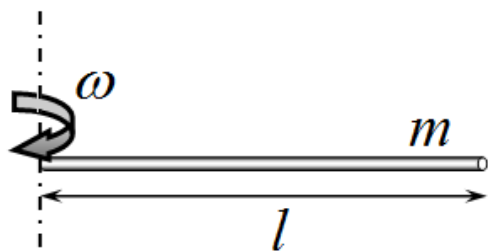
2.1 Покажите, что период малых колебаний стержня определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g(\tilde{K} - \cos(\alpha + \gamma))}}, \quad (2)$$

где l - длина подвижного стержня, $\tilde{K}$ - найденный в первой части коэффициент жесткости пружинки, γ - угол изгиба пружинки в положении равновесия.

Подсказка: Кинетическая энергия тонкого однородного стержня, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец равна

$$E = \frac{ml^2}{6}\omega^2.$$



2.2 Измерьте зависимость периода колебаний $T(\alpha)$ подвижного стержня в вертикальной плоскости от угла наклона неподвижного стержня α . Проверьте выполнимость формулы (2). Используя полученные данные, определите коэффициент $\tilde{K}$. Сравните это значение со значением, полученным в первой части работы.

Решение

Задача 11-2 Деформация изгиба

Часть 1.

Из рисунка следует, что момент силы относительно пружинки равен

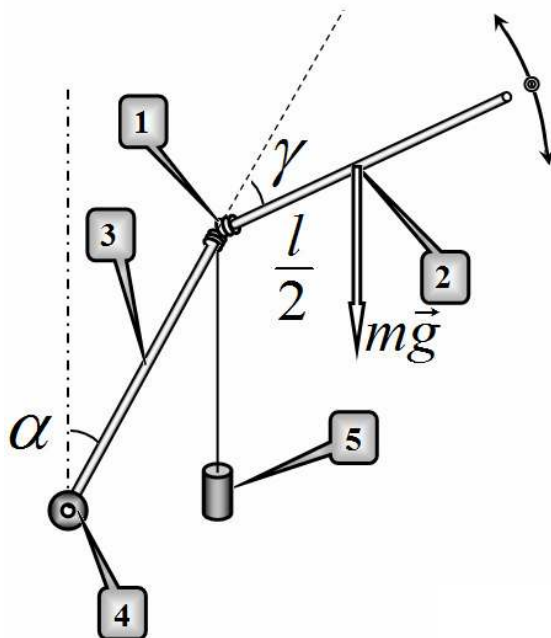
$$M = mg \frac{l}{2} \sin(\alpha + \gamma). \quad (1)$$

В положении равновесия он компенсируется моментом силы упругости

$$M = K\gamma. \quad (2)$$

Следовательно, в положении равновесия должно выполняться условие

$$K\gamma = mg \frac{l}{2} \sin(\alpha + \gamma). \quad (3)$$



1.1 Отметим, что установить является ли величина K больше или меньше 1 можно следующим простым способом. Рассмотрим уравнение (3) при $\alpha = 0$ (то есть при вертикальном положении палочки). Это уравнение имеет очевидный корень $\varphi = 0$. При $K > 1$ этот корень будет устойчивым, при $K < 1$ неустойчивым. Эксперимент показывает, что две палочки вертикально вверх находятся в состоянии равновесия не могут. Следовательно, $K < 1$.

При использовании указанной единицы измерения момента силы $M_0 = mg \frac{l}{2}$ уравнение (3) упрощается

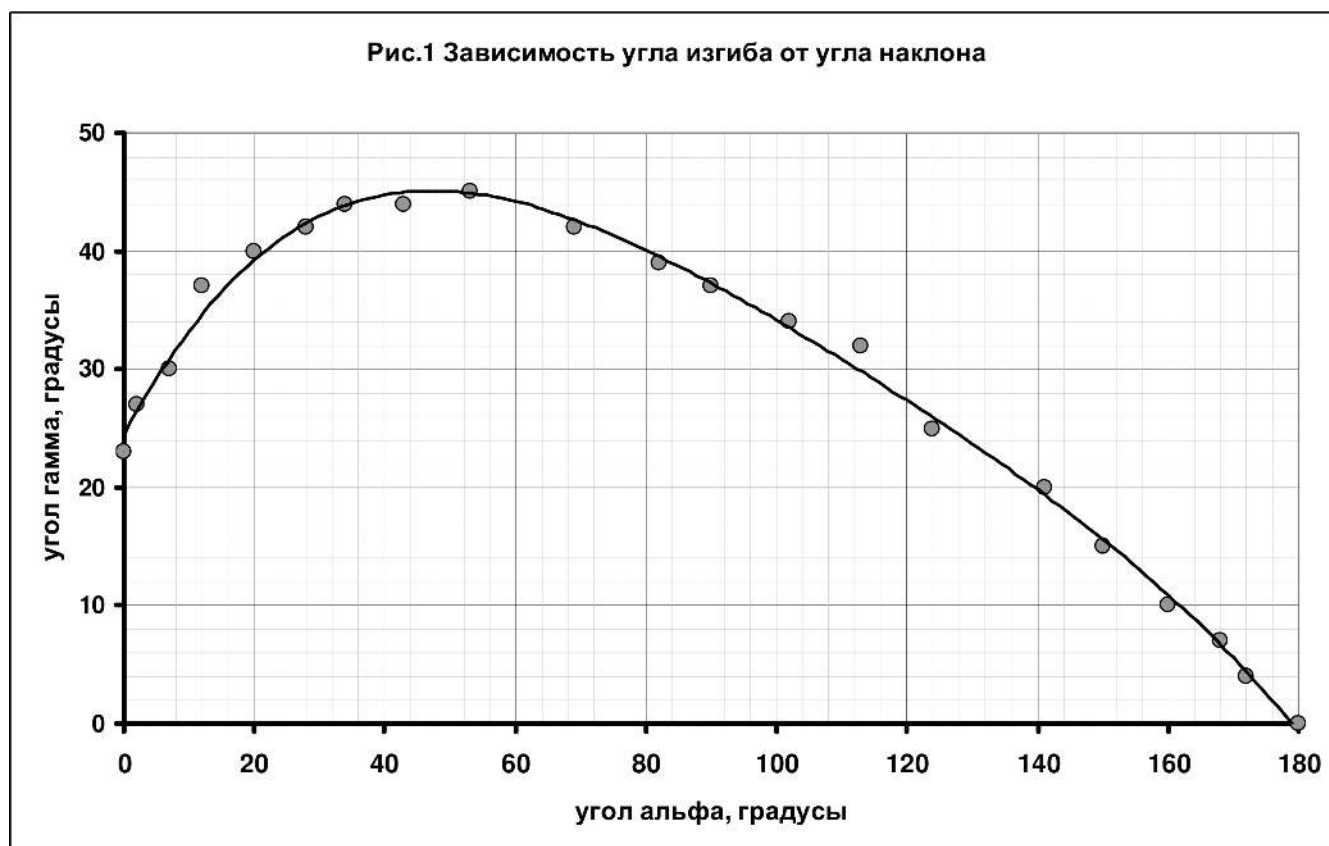
$$\tilde{K}\gamma = \sin(\alpha + \gamma) \quad (4)$$

Необходимо измерить углы α и γ и построить зависимость угла γ от $\sin(\alpha + \gamma)$. Линейность данной зависимости будет свидетельствовать о применимости закона Гука для деформации изгиба пружинки. Результаты измерений приведены в таблице 1. И на графике Рис. 1. Там же приведены все необходимые в дальнейшем расчеты.

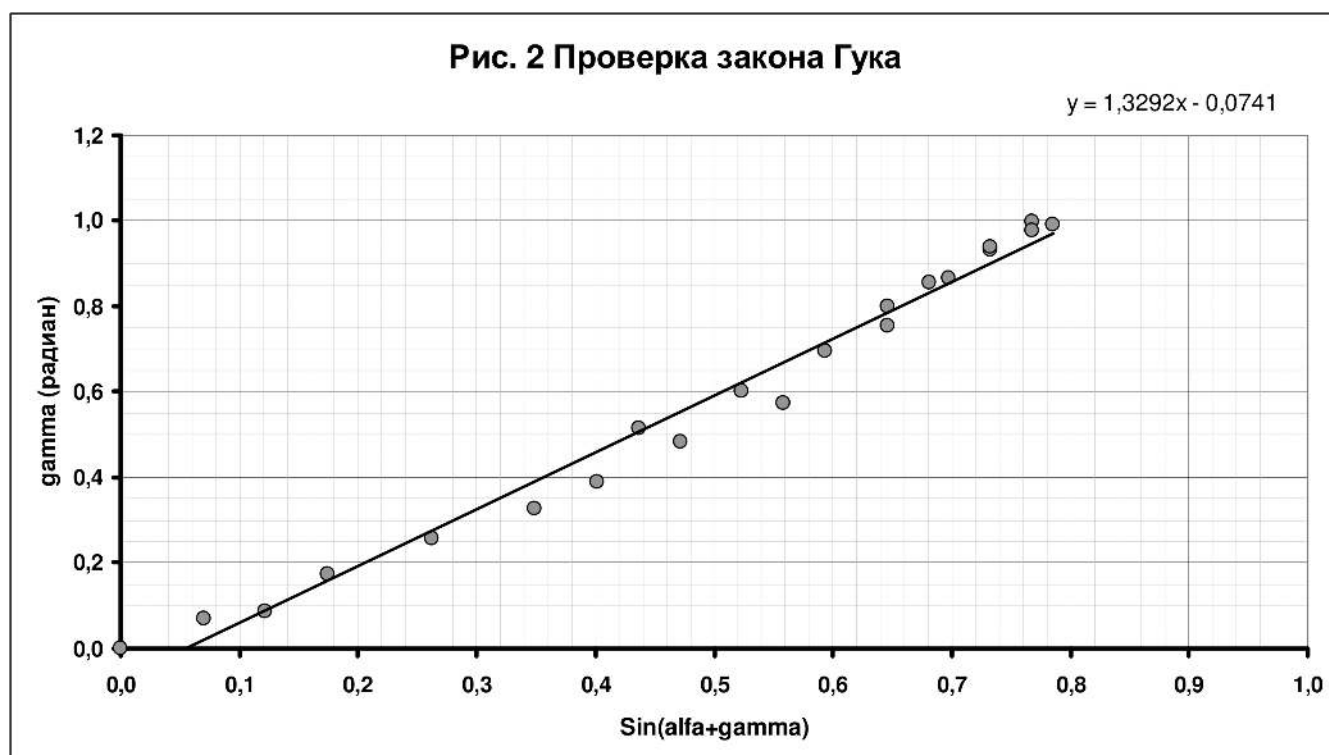
Таблица 1.

$\alpha, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$T, \text{с}$	$\alpha, \text{рад}$	$\gamma, \text{рад}$	$\sin(\alpha + \gamma)$	$\cos(\alpha + \gamma)$	$T^{-2}, \text{с}^{-2}$
180	0	0,606	3,142	0,000	0,000	-1,000	2,723
172	4	0,617	3,002	0,070	0,070	-0,998	2,627
168	7	0,610	2,932	0,122	0,087	-0,996	2,687
160	10	0,578	2,793	0,175	0,174	-0,985	2,993
150	15	0,587	2,618	0,262	0,259	-0,966	2,902
141	20	0,588	2,461	0,349	0,326	-0,946	2,892
124	25	0,596	2,164	0,436	0,515	-0,857	2,815
113	32	0,599	1,972	0,559	0,574	-0,819	2,787
102	34	0,614	1,780	0,593	0,695	-0,719	2,653
90	37	0,612	1,571	0,646	0,799	-0,602	2,670
82	39	0,613	1,431	0,681	0,857	-0,515	2,661
69	42	0,651	1,204	0,733	0,934	-0,358	2,360
53	45	0,682	0,925	0,785	0,990	-0,139	2,150
43	44	0,697	0,750	0,768	0,999	0,052	2,058
34	44	0,736	0,593	0,768	0,978	0,208	1,846

28	42	0,746	0,489	0,733	0,940	0,342	1,797
20	40	0,821	0,349	0,698	0,866	0,500	1,484
12	37	0,898	0,209	0,646	0,755	0,656	1,240
7	30	0,961	0,122	0,524	0,602	0,799	1,083
2	27	1,038	0,035	0,471	0,485	0,875	0,928
0	23	1,125	0,000	0,401	0,391	0,921	0,790



На следующем рисунке приведен график зависимости $\gamma(\sin(\alpha + \gamma))$



Этот график показывает, что уравнение (4) применимо практически во всем диапазоне углов изгиба. Найденный по этому графику коэффициент оказывается равным $\tilde{K} = 0,75$.

Часть 2.

Для вывода указанной формулы запишем выражение для полной энергии колеблющегося стержня,

$$\frac{ml^2}{6}\omega^2 + \frac{K(\gamma + \varphi)^2}{2} + mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma + \varphi) = E \quad (5)$$

В этом уравнение φ - малое отклонение от равновесного угла γ . Далее для расчета периода малых колебаний необходимо разложить потенциальную энергию, оставляя только квадратичные слагаемые по малой величине φ . Несложные преобразования приводят к результату

$$\begin{aligned} U &= \frac{K(\gamma + \varphi)^2}{2} + mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma + \varphi) = \\ &= \frac{K(\gamma^2 + 2\gamma\varphi + \varphi^2)}{2} + mg\frac{l}{2}(\cos(\alpha + \gamma)\cos\varphi - \sin(\alpha + \gamma)\sin\varphi) \approx \\ &\approx \frac{K(\gamma^2 + 2\gamma\varphi + \varphi^2)}{2} + mg\frac{l}{2}\left(\cos(\alpha + \gamma) \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \sin(\alpha + \gamma) \cdot \varphi\right) = \\ &= \left(\frac{K\gamma^2}{2} + mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma)\right) + \left(K\gamma - mg\frac{l}{2}\sin(\alpha + \gamma)\right) \cdot \varphi + \left(K - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma)\right) \frac{\varphi^2}{2} \end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в нуль ввиду условия равновесия, а первое можно не учитывать, как несущественную постоянную добавку к потенциальной энергии. Подставляя полученное выражение $U = \left(K - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma)\right) \frac{\varphi^2}{2}$ в уравнение закона сохранения энергии, получим уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{ml^2}{6}\omega^2 + \left(K - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma)\right) \frac{\varphi^2}{2} = E$$

Из которого следует приведенная формула

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{3\left(K - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma)\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{3mg\frac{l}{2}\left(\frac{K}{mg\frac{l}{2}} - \cos(\alpha + \gamma)\right)}} = \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g\left(\tilde{K} - \cos(\alpha + \gamma)\right)}} \\ &\sqrt{\frac{ml^2}{3\left(K - mg\frac{l}{2}\cos(\alpha + \gamma)\right)}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{ml^2}{3mg \frac{l}{2} \left(\frac{K}{mg \frac{l}{2}} - \cos(\alpha + \gamma) \right)}}$$

Для проверки этой формулы ее следует линеаризовать, построив зависимость

$$\frac{1}{T^2} = \frac{3g}{8\pi l} \left(\tilde{K} - \cos(\alpha + \gamma) \right) \quad (6)$$

График этой зависимости показан на следующем рисунке 3. Если найти параметры полученной линейной зависимости ($y = ax + b$), то, как следует из формулы (6), коэффициент упругости пружинки определяется по формуле

$$\tilde{K} = -\frac{b}{a}.$$

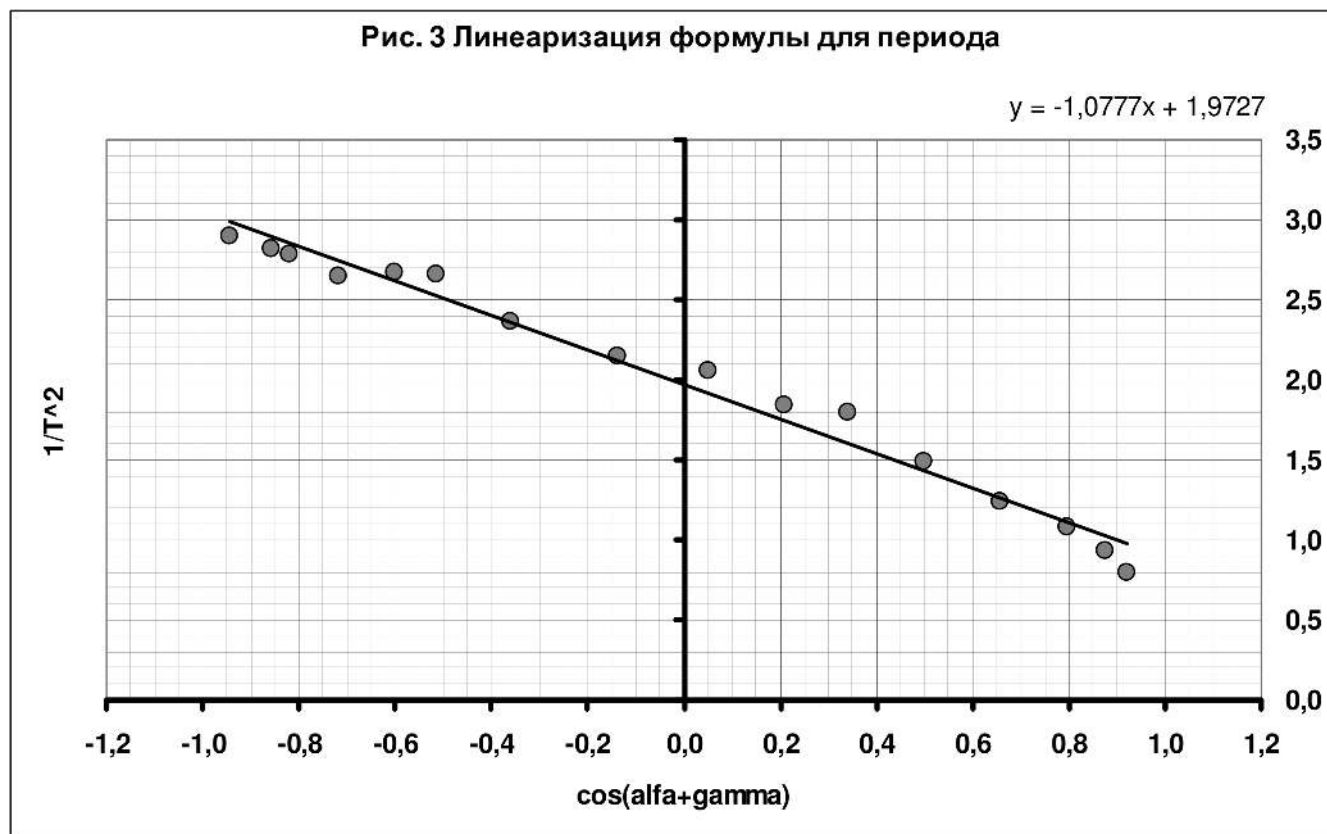


Рис. 3 Линеаризация формулы для периода

Из данного графика следует, что $\tilde{K} \approx 0,56$, что несколько отличается от полученного ранее значения.