

Условие

11 класс.

1. Полный комплект состоит из семи частей, связанных общей идеей.
2. При оформлении работы каждую задачу начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету!
3. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач (но не с их решениями), обращайтесь к представителям Жюри.



Постарайтесь внимательно прочитать условия задач! Может вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

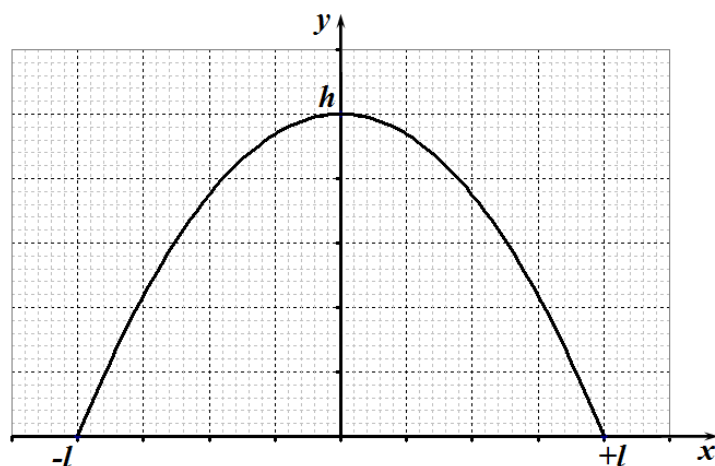
Параболическая физика.

Часть 1. Математическое введение.

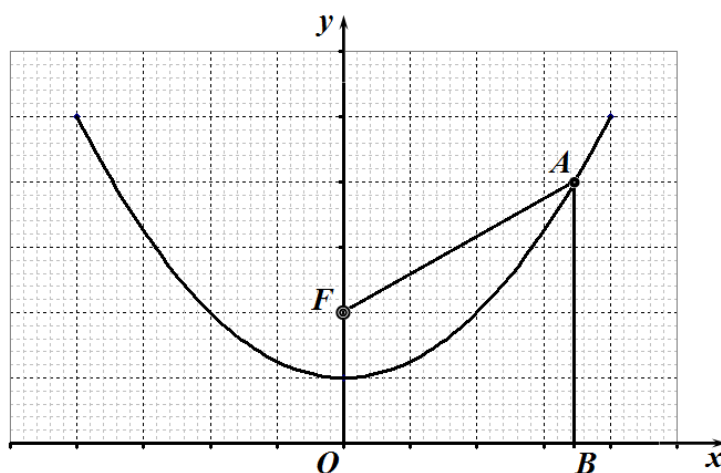
На уроках математики вы изучали квадратичную функцию

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

И, возможно, знаете, что ее графиком является парабола. Такая функция часто встречается и в физике. Иногда бывает полезно представить эту функцию в таком виде, чтобы ее параметры имели наглядный смысл.



1.1 Запишите уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy , пересекающей ось Ox в точках $x = \pm l$, а ось Oy в точке $y = h$ (рис. 1) Рис. 1

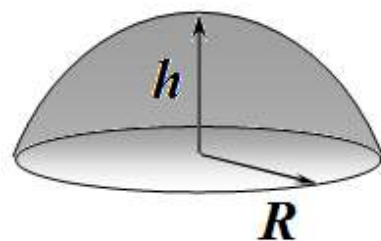


1.2 Параболу можно также определить, как геометрическое место точек A , таких, что расстояние от этих точек до прямой (называемой *директрисой* параболы) равно расстоянию до некоторой точки F (называемой фокусом параболы) $AB = AF$. Запишите уравнение параболы, для которой директрисой является ось Ox , а фокус лежит на оси Oy в точке $y_F = a$ (рис. 2). Рис. 2

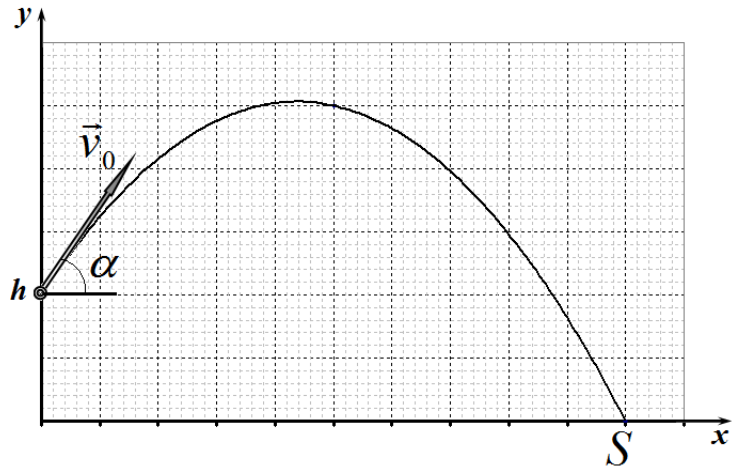
При решении задачи вам понадобится формула (выводить ее не надо) для объема кругового параболоида радиуса R и высотой h .

$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 h$$

Такая фигура получается при вращении параболы вокруг собственной оси (Рис. 3). Рис. 3



Часть 2. Тело брошено под углом к горизонту... сопротивление воздуха не учитывать!



2.1 Камень бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 с обрыва высотой h над поверхностью воды. Совместим ось Ox с поверхностью воды, а вертикальную ось Oy проведем через точку бросания (Рис. 4)

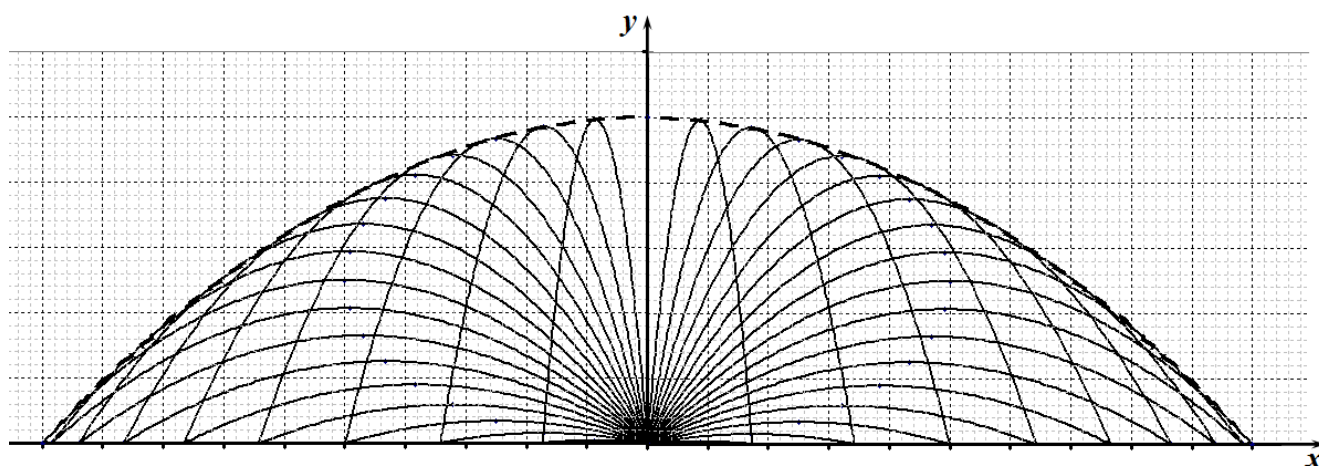
2.1.1 Запишите уравнение траектории полета камня $y(x)$.

2.1.2 Найдите, на каком расстоянии S от обрыва камень упадет в воду.

2.1.3 Под каким углом к горизонту следует бросать камень (при неизменном модуле начальной скорости v_0), чтобы он упал на максимально возможном расстоянии от обрыва? Чему равно это максимальное расстояние $S_{\max}$?

Часть 3 Парабола безопасности

3.1 Некий хулиган любит бросаться камнями. Пусть он бросает камни из начала координат под произвольными углами к горизонту, но с одной и той же начальной скоростью v_0 . Покажите, что огибающая всех траекторий камней (граница области досягаемости) является параболой. Найдите уравнение этой параболы $Y(x)$ (которая также называется *параболой безопасности* - на рис. 5 она изображена пунктиром).



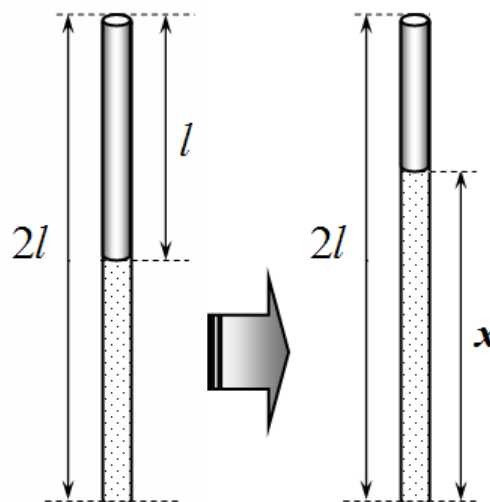
Часть 4. Газовая парабола

В вертикальной трубке длиной $2l$ с открытым верхним концом столбик ртути высотой l запирает воздух, находящийся в нижней части пробирки при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Атмосферное давление равно $P_0 = 0,80l$ (в мм рт. ст.)

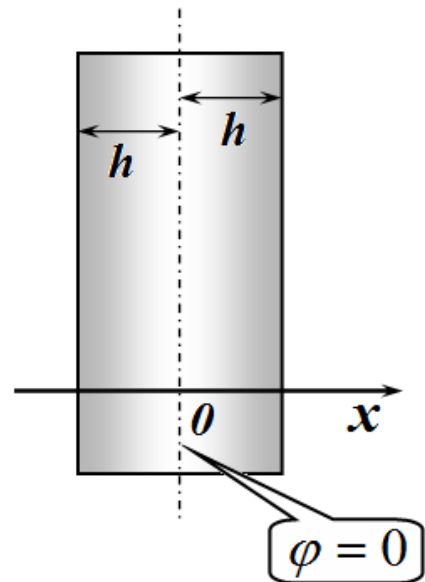
Чтобы вытеснить ртуть из трубки воздух в ней начинают медленно нагревать. Будем считать процесс нагревания квазистационарным, т.е. при любой высоте столбика воздуха x система находится в равновесии.

4.1 Постройте графики зависимостей давления $P(x)$ и температуры воздуха $T(x)$ в пробирке от высоты столбика воздуха x в процессе расширения газа. Выберите такие единицы измерения, чтобы ваши графики были точными, а не схематическими.

4.2 До какой минимальной температуры следует нагреть газ, чтобы он полностью вытеснил ртуть из трубки?



Часть 5. Электрическая парабола



5.1 Пластина толщиной $2h$ равномерно заряжена с объемной плотностью заряда ρ . поперечные размеры пластины значительно больше ее толщины, так что граничными эффектами можно пренебречь.

Ось Ox направлена перпендикулярна пластине, начало отсчета находится в центре пластины.

5.1.1 Найдите зависимость проекции вектора напряженности электрического поля E_x на ось Ox от координаты x в диапазоне $x \in [-2h, +2h]$. Постройте график полученной зависимости. Считайте заряд пластины отрицательным.

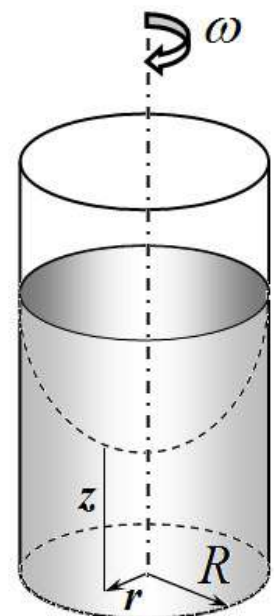
5.1.2 Найдите зависимость потенциала электростатического поля от координаты x в диапазоне $x \in [-2h, +2h]$, если потенциал в центре пластины принят равным нулю $\varphi(0) = 0$. Постройте график полученной зависимости.

Часть 6. Парабола в стакане

Высокий цилиндрический сосуд радиуса R частично заполнен водой, высота уровня воды в покое равна h_0 . Сосуд начинают раскручивать вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. При этом на поверхности воды образуется осесимметричная воронка.

6.1 Найдите уравнение профиля этой воронки, т.е. высоту уровня воды z в точке, находящейся на расстоянии r от оси вращения. Угловая скорость вращения равна ω , при этом вода из сосуда не выливается, воронка не достает дна сосуда.

6.2 При какой угловой скорости вращения ω^* воронка достигнет дна сосуда?



Часть 7. Оптическая парабола

Американский физик Д.Вуд предложил оригинальную отражательную

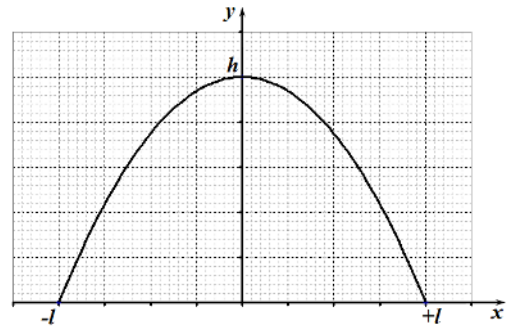
оптическую систему (телескоп Вуда): сосуд со ртутью вращают с малой угловой скоростью $\omega = 1,5$ рад/с. Поверхность ртути представляет собой зеркало, в котором формируется изображение звезд.

6.1 Докажите, что все (а не только идущие на малых расстояниях от оси) параллельные лучи, падающие на зеркало после отражения в нем пересекутся в одной точке. На каком расстоянии от вершины зеркала находится эта точка?

6.2 Две звезды находятся вблизи зенита так, что угловое расстояние между ними для земного наблюдателя равно $\Delta\alpha = 1,0^\circ$. Найдите расстояние Δl между их изображениями в телескопе Вуда при заданных параметрах системы.

Считайте ускорение свободного падения равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Решение



Часть 1

1.1 Уравнение данной параболы имеет вид

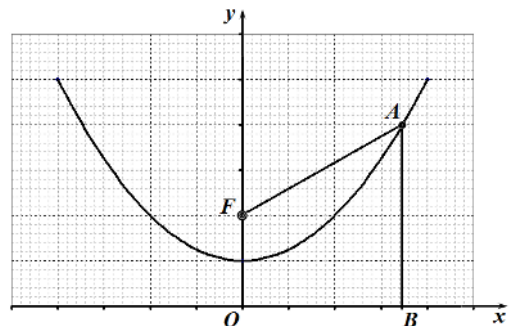
$$y = h \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (1)$$

1.2 Выразим расстояния AF и AB через координаты точки $A(x, y)$ и приравняем их:

$$y = \sqrt{(y - a)^2 + x^2}. \quad (2)$$

После элементарных преобразований получим:

$$y^2 = y^2 - 2ay + a^2 + x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2 + a^2}{2a} \quad (3)$$



Часть 2.

2.1.1 Запишем закон движения камня

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (4)$$

Выражая из первого уравнения $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ и подставляя во второе, получим

$$\begin{aligned} y &= h + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow \\ y &= h + kx - \frac{g}{2v_0^2} (1 + k^2) x^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь обозначено $k = \operatorname{tg} \alpha$ и использована тригонометрическая формула $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$.

2.1.2 Дальность полета S - есть координата x , когда $y = 0$, поэтому для ее расчета следует решить квадратное уравнение

$$0 = h + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \quad (6)$$

Что не слишком сложно:

$$x^2 - 2 \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} x - 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} h = 0 \Rightarrow$$

$$S = x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} h} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right) \quad (7)$$

Поэтому рассмотрим выражение (5), как уравнение относительно тангенса угла бросания k , при котором достигается дальность S , для этого положим $y = 0$, $x = S$. Если дискриминант этого уравнение обращается в нуль, то этому соответствует максимальная дальность полета. Поэтому преобразуем уравнение

$$0 = h + kS - \frac{g}{2v_0^2} (1 + k^2) S^2. \quad (8)$$

к стандартному виду

$$k^2 - \frac{2v_0^2}{gS}k - \frac{2v_0^2}{gS^2}h + 1 = 0. \quad (9)$$

И приравняем его дискриминант к нулю:

$$D = \left(\frac{v_0^2}{gS}\right)^2 + \frac{2v_0^2}{gS^2}h - 1 = 0. \quad (10)$$

Из этого уравнения находим максимальную дальность

$$S_{\max} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2}{g}h} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}. \quad (11)$$

Наконец, из уравнения (9) (при нулевом дискриминанте) определяем угол, при котором достигается максимальная дальность:

$$k^* = \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{v_0^2}{gS_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}. \quad (12)$$

Часть 3.

3.1 Запишем уравнение траектории камня, брошенного под углом α к горизонту с нулевой высоты (это уравнение (5) с $h = 0$)

$$y = kx - \frac{g}{2v_0^2}(1 + k^2)x^2 \quad (13)$$

Теперь это выражение будем рассматривать как функцию тангенса угла бросания k при фиксированном значении координаты x . Понятно, что точке, лежащей на огибающей соответствует максимальное значение этой функции, которое находится стандартным образом:

- Вычисляем производную по k и приравниваем ее к нулю:

$$y'_k = x - \frac{g}{v_0^2}kx^2 = 0 \quad (14)$$

- Решаем полученное уравнение

$$k^*x = \frac{v_0^2}{g} \quad (15)$$

- подставляем в выражение (13), которое теперь уже рассматриваем как функцию x , тем самым получаем уравнение огибающей

$$Y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{g}{v_0^2} \right)^2 x^2 \right). \quad (16)$$

Отметим, что выражение можно было записать сразу, используя формулу (1), в которой $h = \frac{v_0^2}{2g}$ - максимальная высота полета камня, $l = \frac{v_0^2}{g}$ - максимальная дальность полета.

Часть 4.

4.1 Зависимость давления от объема газа определяется самим устройством, в котором находится рассматриваемый газ. В данном случае давление газа равно сумме атмосферного и гидростатического давлений⁴. Следовательно,

$$P = P_0 + 2l - x. \quad (17)$$

Для расчета зависимости температуры от объема воспользуемся уравнение Клапейрона

$$\frac{Px}{T} = \frac{(P_0 + l)l}{T_0}. \quad (18)$$

Из этого уравнения следует искомая зависимость:

$$T = T_0 \frac{(P_0 + 2l - x)x}{(P_0 + l)l}. \quad (19)$$

Графики этих функций показаны на рис. 3. Чтобы графики были точными удобно использовать относительные единицы, причем в качестве единицы давления и объема используется l .

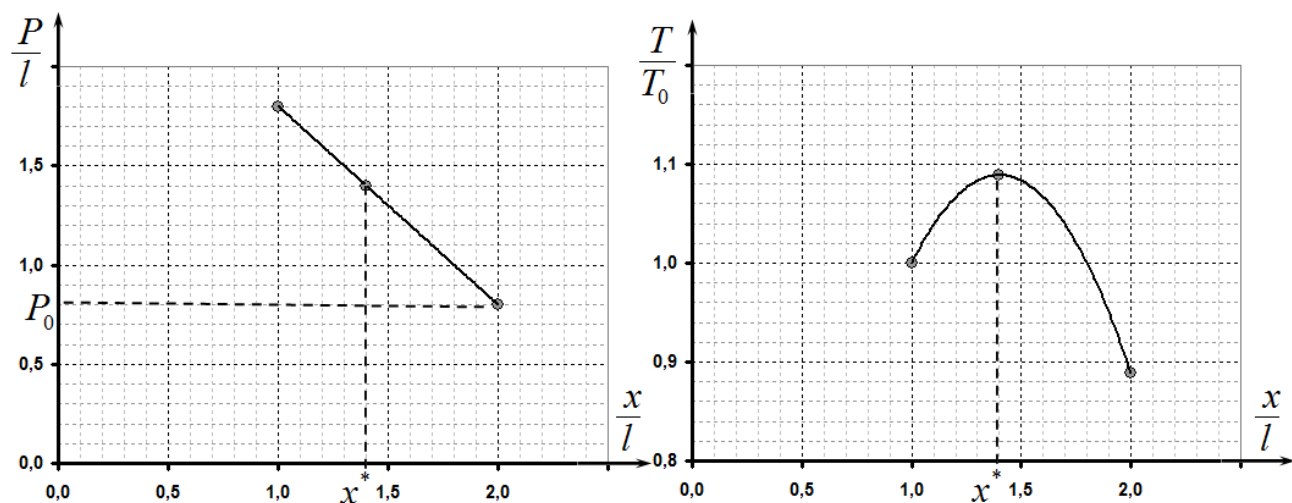


Рис. 3

Зависимость $T(x)$ является квадратичной. Максимум этой функции является параболой. Ее максимум лежит по середине между корнями в точке

$$x^* = l + \frac{P_0}{2}. \quad (20)$$

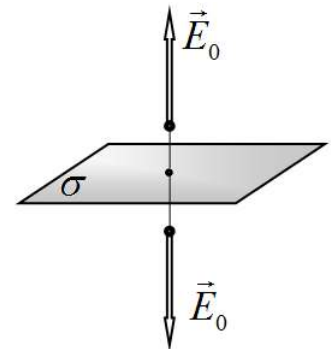
Значение температуры в этой точке равно

$$T_{\max} = T_0 \frac{\left(l + \frac{P_0}{2}\right)^2}{(P_0 + l)l}. \quad (21)$$

Именно до этой температуры следует нагреть газ, после достижения точки $x = x^*$ положение равновесия станет неустойчивым – далее без дальнейшего нагрева газ вытолкнет ртуть. Численное значение этой температуры равно

$$T_{\max} = 293 \frac{\left(l + \frac{0,8l}{2}\right)^2}{1,8l \cdot l} = 319K = 46^\circ C. \quad (22)$$

— 4 4



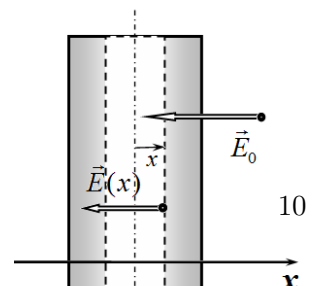
Часть 5.

5.1.1 Известно, что бесконечно большая равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ создает однородное поле, напряженность которого определяется по формуле

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (23)$$

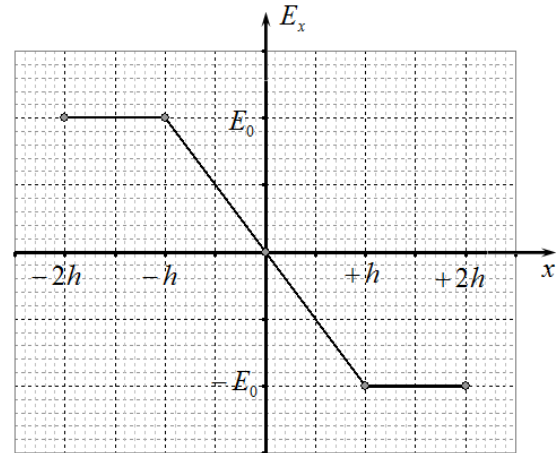
Так как для напряженности поля справедлив принцип суперпозиции, то эта же формула будет справедлива и для толстой пластины. В этом случае под поверхностной плотностью заряда следует понимать величину заряда, находящегося под площадкой единичной площади. В частности для однородно заряженной пластины толщиной h : $\sigma = \rho h$.

11 класс. Теоретический тур.



Рассмотрим описанную пластину. Поле внутри пластины в точке, находящейся на расстоянии x от ее середины. Фактически электрическое поле в этой точке создается зарядами, находящимися в слое от $-x$ до $+x$. Поля, создаваемые зарядами вне этого слоя, компенсируют друг друга (рис. 5). Поэтому в соответствии с проведенными выше рассуждениям

$$E(x) = \frac{2\rho x}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}. \quad (24)$$



При $x > h$ напряженность поля рассчитывается по формуле

$$E_0(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}. \quad (25)$$

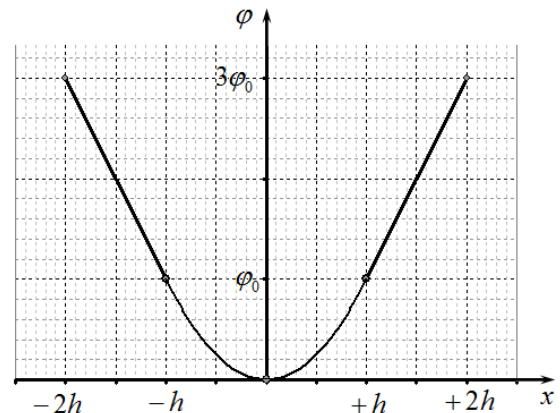
Направление вектора напряженности показано на рис. 5. При $x < 0$ картина поля симметрично отражается относительно центра пластины. График этой функции показан на рис. 6.

Для расчета потенциала следует использовать формулу, связывающую разность потенциалов и напряженность поля:

$$\Delta\varphi(x) = -E_x\Delta x. \quad (26)$$

Так как напряженность поля изменяется, то изменение потенциала численно равно площади под графиком зависимости $E_x(x)$. Элементарные расчеты показывают, что при $x < h$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}E_x(x) \cdot x = \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}. \quad (27)$$



При $x > h$ напряженность поля постоянна, поэтому потенциал возрастает по линейному закону, в этой области

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(h) + E_0 \cdot (x - h) = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho h}{\varepsilon_0} (x - h) = \\ &= \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} (2x - h)\end{aligned}\quad (28)$$

Понятно, что функция $\varphi(x)$ четная. График этой функции показан на рис. 6.

Часть 6.

Проще всего решить эту задачу в неинерциальной вращающейся системе отсчета. В стационарном случае потенциальная энергия любой малой частички воды, находящейся на поверхности должна быть постоянна, иначе эта частичка воды будет перетекать в область с меньшей энергией.

Во вращающейся системе отсчета на любое тело массы m действует центробежная сила

$$\vec{F} = m\omega^2 \vec{r}, \quad (29)$$

Где $\vec{r}$ - вектор, соединяющий данное тело с осью вращения и направленный перпендикулярно этой оси. Этой силе соответствует энергия

$$U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}. \quad (30)$$

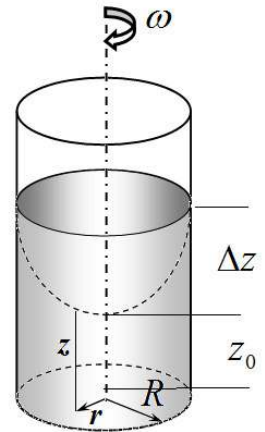
Здесь уместна аналогия: силе Гука $F = -kx$ соответствует энергия $U = \frac{kx^2}{2}$.

Полная энергия частицы, находящейся на поверхности складывается из центробежной энергии и энергии силы тяжести (и эта сумма должна быть постоянной):

$$E = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + mgz. \quad (31)$$

Таким образом, уравнение поверхности имеет вид

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (32)$$



Постоянное слагаемое z_0 , имеющее смысл высоты нижней точки воронки, может быть найдено из условия постоянства объема жидкости. Из формулы для объема параболоида, приведенной в условии задачи следует, что объем параболоида в два раза меньше объема цилиндра, описанного вокруг него. Поэтому условие постоянства объема имеет вид

$$\pi R^2 h_0 = \pi R^2 z_0 + \frac{1}{2} \pi R^2 \Delta z \quad (34)$$

где Δz - высота воронки, которая как следует из формулы (32), равна $\Delta z = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$

Подставим это выражение в формулу (34), в результате найдем

$$h_0 = z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \Rightarrow z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (35)$$

Окончательное выражение для профиля воронки принимает вид

$$z = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (36)$$

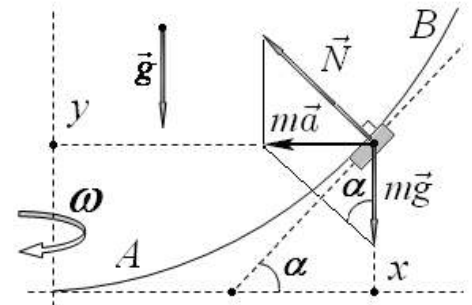
Воронка достигнет дна, если z_0 станет равным нулю. Из выражения (35) получим

$$h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0 \Rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{4gh_0}{R^2}} \quad (37)$$

Дополнение. Данная часть задачи допускает и традиционное решение.

Рассмотрим малый элемент жидкости массой m на её поверхности, находящийся на расстоянии x от оси вращения системы. На рассматриваемый элемент жидкости действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны окружающей жидкости (см. рис.). Согласно второму закону Ньютона можем записать

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}, \quad (Д1)$$



где $a = \omega^2 x$ – центростремительное ускорение рассматриваемого элемента при вращении.

Заметим, что поскольку жидкости текучи, то ориентация вектора $\vec{N}$ относительно поверхности жидкости не может быть произвольной – он должен быть перпендикулярен касательной к поверхности жидкости в данной точке. Из прямоугольного векторного треугольника (Д1) найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{\omega^2 x}{g} \quad (Д2)$$

Учитывая, что

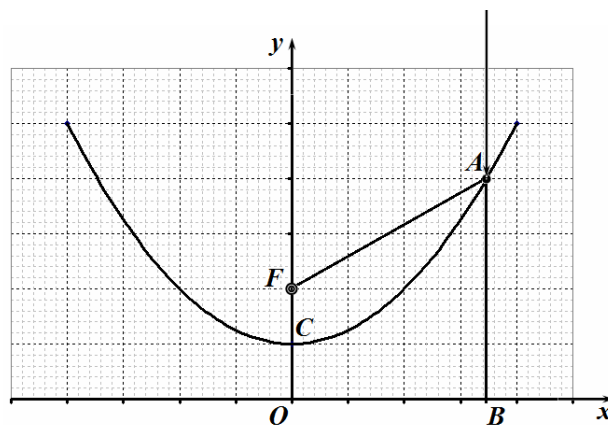
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

легко получим уравнение кривой свободной поверхности жидкости относительно нижней точки

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Часть 7.

В предыдущей части задачи было показано, что поверхность вращающейся жидкости является параболоидом, следовательно, зеркало является параболическим (именно таким, какие используются в современных телескопах). Воспользуемся свойством параболы рассмотренным в п. 1.2. Из этого свойства следует, что любой луч, попадающий на зеркало (например, в т. А.) , достигнет фокуса параболы F за одно и тоже время, так расстояния AB и AF равны. Следовательно, для всех лучей (точнее волн) в этой точке будет выполняться условие максимума интерференции, поэтому все лучи пройдут через эту точку.



Аналогичная ситуация выполняется и для линз: время прохождения света от источника до изображения одинаково для всех лучей (это свойство называется *таутохронизмом*).

Вернемся к уравнению параболы (3)

$$y = \frac{x^2 + a^2}{2a},$$

из которого следует, что расстояние от фокуса до вершины (фокусное расстояние) параболы равно $f = \frac{a}{2}$. Сравним с уравнением параболы, описывающей форму поверхности жидкости (36):

$$z = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Так как фокусное расстояние определяется кривизной параболы (т.е коэффициентом при x^2), то имеем право записать:

$$\frac{\omega^2}{2g} = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{g}{\omega^2}. \quad (38)$$

Следовательно, фокусное расстояние зеркала Вуда равно

$$f = \frac{g}{2\omega^2} = \frac{9,8}{2 \cdot 1,5^2} = 2,2 \text{ м.} \quad (39)$$

Этот же результат можно получить и с помощью геометрических построений с последующими достаточно громоздкими выкладками.

6.2 Очевидно (вспомните обычное сферическое зеркало), что расстояние между изображениями звезд будет равно

$$\Delta l = f \Delta \alpha \quad (40)$$

Подставляя численные значения параметров (и не забывая перевести градусы в радианы), получим

$$\Delta l = f \Delta \alpha = 2,2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 1 = 3,8 \text{ см.} \quad (41)$$

⁴ Так как атмосферное давление измерено в мм рт. ст., то и гидростатическое давление столба ртути также можно измерять в мм рт. ст., которое численно равно высоте столба.