

Условие

Задача 3. Терморезистор – терморегулятор.

В данной задаче Вам необходимо проанализировать возможность применения такого прибора в качестве нагревателя и терморегулятора (устройства, поддерживающего постоянную заданную температуру). Далее эту не изменяющуюся температуру будем называть установившейся температурой.

Терморезистор – полупроводниковый прибор, электрическое сопротивление которого уменьшается с ростом температуры.

На отдельном бланке №1 показан график зависимости проводимости используемого терморезистора от температуры. Эта зависимость описывается формулой

$$G = at^2 + b, \quad (1)$$

где t - температура терморезистора в градусах Цельсия, $a = 5,0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{См}}{\text{К}^2}$, $b = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{См}$ - постоянные коэффициенты.

Справка: Проводимость – величина обратная электрическому сопротивлению $G = \frac{1}{R}$.

Единица измерения – сименс (См) $1 \text{См} = 1 \text{Ом}^{-1}$.*

В своем решении Вы можете использовать этот бланк, проводя на нем дополнительные построения. Не забудьте его сдать вместе с Вашей рабочей тетрадью!

1. Чему равно сопротивление терморезистора при комнатной температуре? 2. Терморезистор подключен к источнику постоянного напряжения $U = 20 \text{В}$. Чему равна мощность выделяющейся теплоты, если температура терморезистора равна комнатной?

**Здесь и далее комнатную температуру считайте равной $t_0 = 20^\circ\text{С}$ **

Терморезистор опущен в сосуд, содержащий $m = 200 \text{г}$ воды, которую необходимо нагревать, а затем поддерживать постоянную температуру. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, теплоемкостью сосуда и терморезистора можно пренебречь, удельная теплота испарения воды $L = 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$. Нагретая вода остывает из-за потерь теплоты в окружающую среду. Мощность тепловых потерь описывается формулой

$$P = \beta(t - t_0), \quad (2)$$

где t - температура воды в сосуде, $t_0 = 20^\circ\text{С}$ - температура окружающей среды, β - постоянная величина, которая называется коэффициент теплоотдачи.

3. Найдите численное значение коэффициента теплоотдачи β , если известно, что вода в стакане, нагретая до температуры $t = 30^\circ\text{С}$ остывает (при выключенном нагревателе) на 1° за 1 минуту.

Далее Вам необходимо исследовать зависимость установившейся температуры t воды в сосуде от напряжения U , прикладываемому к терморезистору. Напряжение источника, подаваемого на терморезистор, может изменяться от 0 до 30 В.

4. Постройте в тетради (а не на бланке) схематические графики мощности теплоты, выделяющейся при протекании электрического тока через терморезистор и мощности тепловых потерь в окружающую среду от температуры воды. Построения проведите для двух значений напряжения источника, при которых характер процессов нагревания существенно изменяется. Укажите, в чем заключается это изменение.

5. Используя график зависимости проводимости от температуры (бланк №1), найдите примерный диапазон температур, которые могут поддерживаться постоянными рассматриваемым устройством. Также укажите, при каком минимальном напряжении на терморезисторе вода в сосуде сможет нагреться от комнатной температуры до температуры кипения.. Необходимые построения проведите на этом бланке.

6. Рассчитайте зависимость установившейся температуры воды в сосуде от напряжения источника. Постройте график этой зависимости.

7. Напряжения источника выбрано таким, что установившаяся температура воды равна 50° . Оцените, за какое время τ_1 вода нагревается от комнатной температуры на 1° . Также оцените время τ_2 , за которое вода нагреется от 49° до 50° .

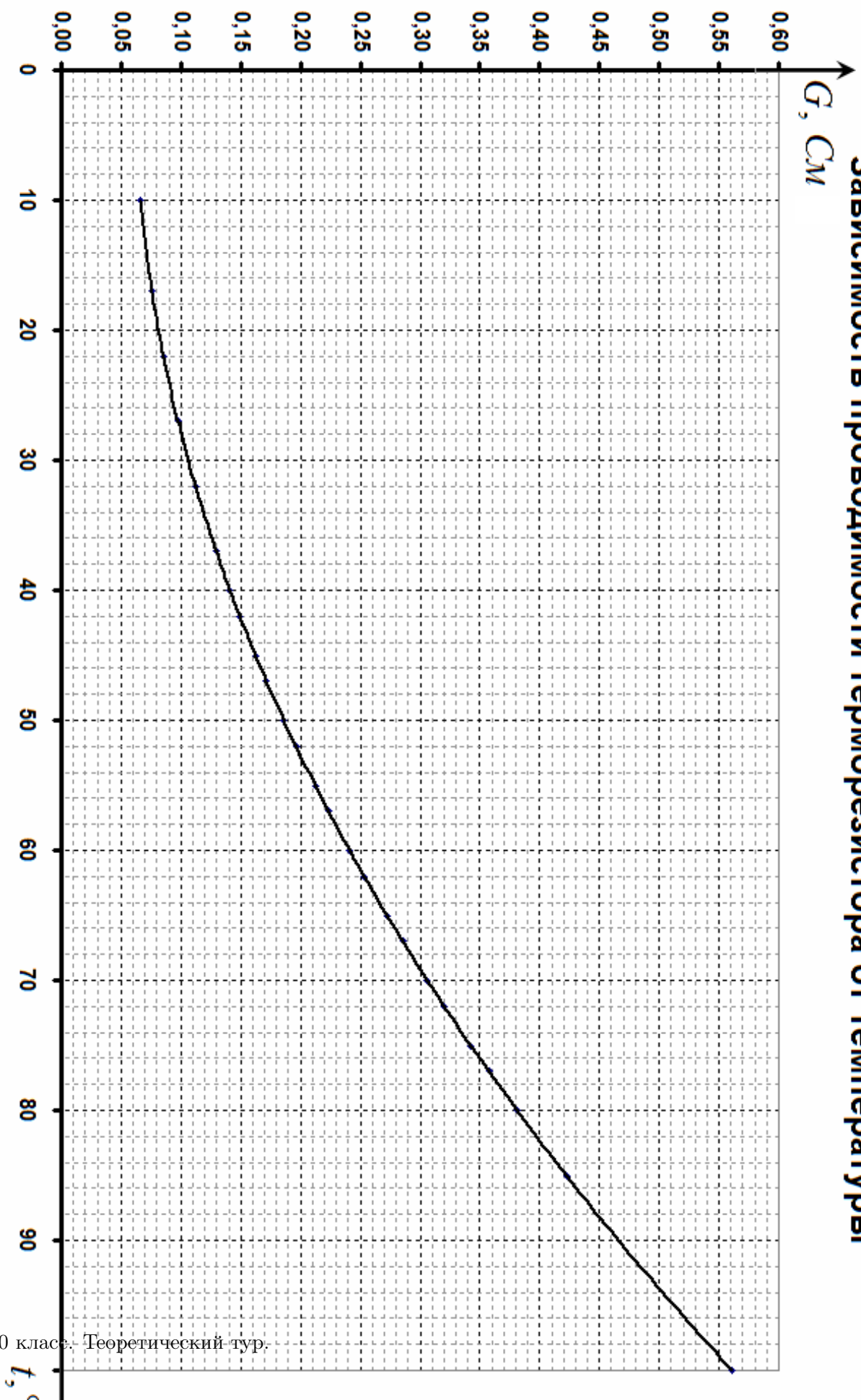
8. Напряжение источника настроено на установившуюся температуру $t = 50^\circ$, однако в сосуд налили воду, масса которой $m = 200$ г, находящуюся при температуре $t = 80^\circ$. При этом оказалось, что вода закипела. Объясните, почему закипела вода. Оцените время τ_3 , за которое вода нагреется до температуры кипения. Найдите время (от начала закипания) τ_4 , за которое выкипит вся налитая вода.

Бланк №1

Зависимость проводимости терморезистора от температуры

Бланк №1

Зависимость проводимости терморезистора от температуры



Решение

Задача 10-3 Терморезистор – терморегулятор.

1. В соответствии с приведенной формулой

$$G = at^2 + b, \quad (1)$$

Сопротивление терморезистора равно

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{at^2 + b} = \frac{1}{5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}} = 12 \text{ Ом}. \quad (2)$$

2. Мощность выделяющейся теплоты при комнатной температуре рассчитывается по формуле

$$P = U^2 G(t) = 20^2 (5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) = 32 \text{ Вт} \quad (3)$$

3. Для расчета коэффициента теплоотдачи следует использовать уравнение теплового баланса (количество теплоты, выделившейся при остывания воды, уходит в окружающую среду):

$$cm \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -\beta(t - t_0). \quad (4)$$

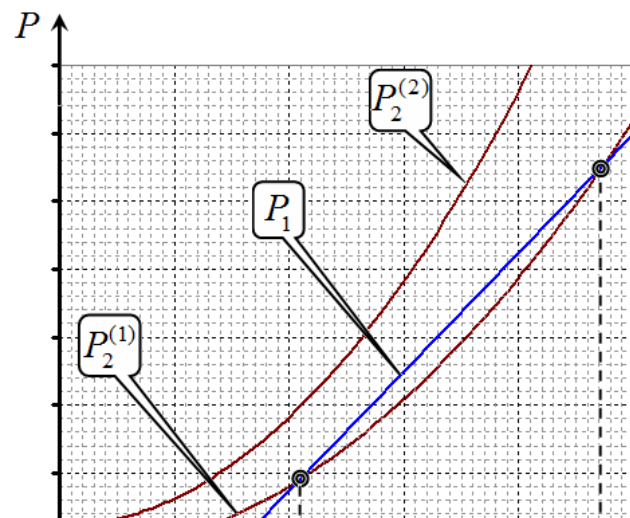
Так как температура изменяется незначительно (всего на 1°) мощность теплопотерь можно считать постоянной. Тогда из уравнения (4) находим

$$\beta = -\frac{1}{t - t_0} cm \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{1}{10} 4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \frac{1}{60} = 1,4 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}. \quad (5)$$

4. При установившейся температуре, количество теплоты, выделяющейся на терморезисторе, равно количеству теплоты, уходящей в окружающую среду:

$$U^2 G(t) = \beta(t - t_0). \quad (6)$$

Установившаяся температура является корнем этого уравнения. Для качественного анализа решения этого уравнения следует построить графики зависимости от температуры: - мощности теплоты, уходящей в окружающую среду $P_1 = \beta(t - t_0)$, графиком которой является прямая, проходящая через точку $t = t_0$; - мощности теплоты, выделяющейся на терморезисторе $P_2 = U^2 G(t)$, графиком которого является парабола.



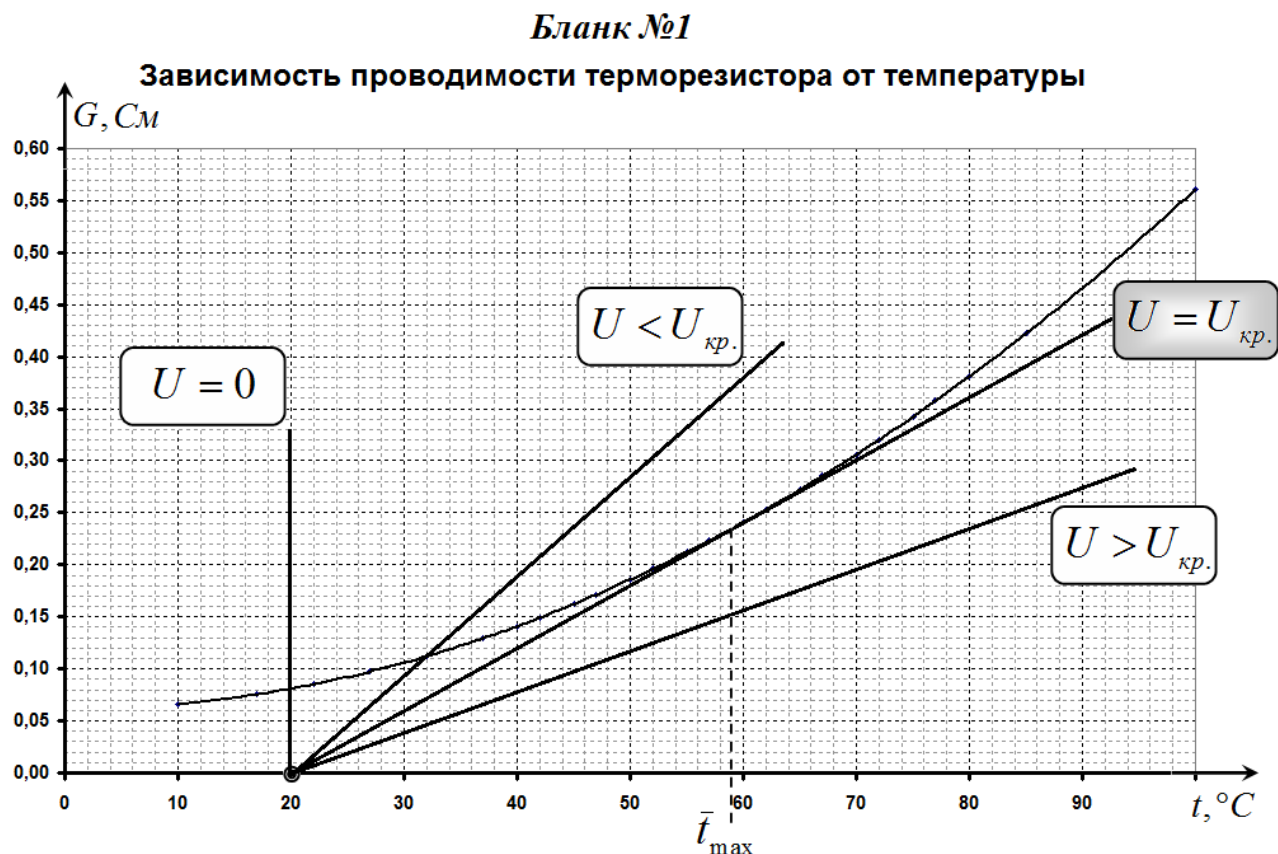
При малых напряжениях парабола $P_2^{(1)}$ пересекает прямую в двух точках: $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$. Легко показать, что первое значение температуры является устойчивым (при малом изменении температуры, она возвращается к исходному значению), а второе $\bar{t}_2$ - неустойчивым. Если напряжение источника превышает некоторое значение, то точек пересечения нет, т.е. уравнение (6) не имеет решений – график функции $P_2^{(2)}$.

5. Для количественного анализа возможных значений установившейся температуры перепишем уравнение (6) в виде:

$$G(t) = \frac{\beta}{U^2} (t - t_0). \quad (7)$$

Теперь на бланке №1 на графике зависимости проводимости от температуры $G(t)$ можно построить семейство прямых, проходящих через точку $t = t_0$, которые являются графиками функций $g(t) = \frac{\beta}{U^2} (t - t_0)$ при разных значениях напряжения на резисторе (рис. 2)

Бланк №1



При $U = 0$ прямая вертикальна, при этом установившаяся температура, естественно, равна комнатной. При увеличении напряжения, наклон прямой уменьшается, при $U < U_{\text{кр.}}$ - име-

ется две точки пересечения с параболой, при напряжении равном некоторому критическому $U = U_{\text{кр.}}$ прямая является касательной к параболе. Координата точки касания и является максимально возможной стационарной установившейся температурой $\bar{t}_{\text{max}}$. По графику можно приближенно определить $\bar{t}_{\text{max}} \approx 60^\circ$. При $U > U_{\text{кр.}}$ теплового равновесия не существует – при этом нагрев воды будет постоянно увеличиваться, т.к. мощность выделяющейся теплоты всегда больше мощности тепловых потерь. Указанному критическому значению напряжения соответствует прямая, коэффициент которой (легко найти по графику) равен $\frac{\beta}{U^2} \approx 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{СМ}}{\text{К}}$, следовательно, $U_{\text{кр.}} \approx \sqrt{\frac{1,4}{4,5 \cdot 10^{-3}}} \approx 17 \text{В}$.

6. Для точного расчета значения установившейся температуры необходимо решить уравнение (7), подставив выражение (1):

$$at^2 + b = \frac{\beta}{U^2} (t - t_0) \Rightarrow at^2 - \frac{\beta}{U^2} t + b + \frac{\beta}{U^2} t_0 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = \left(\frac{\beta}{U^2} \right)^2 - 4a \left(b + \frac{\beta}{U^2} t_0 \right) = 0. \quad (9)$$

В этом случае величина $z = \frac{\beta}{U^2}$ принимает значение

$$z^2 - 4at_0z - 4ab = 0 \Rightarrow z = 2at_0 \pm \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab}. \quad (10)$$

Отрицательный корень данного уравнения в данном случае физического смысла не имеет¹, поэтому критическое напряжение, при котором достигается максимальная установившаяся температура, рассчитывается следующим образом

$$\begin{aligned} z &= \frac{\beta}{U^2} = 2at_0 + \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab} \Rightarrow \\ U_{\text{кр.}} &= \sqrt{\frac{\beta}{2at_0 + \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,4}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 + \sqrt{(2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20)^2 + 4 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 6,1 \cdot 10^{-2}}}} = 15 \text{ В} \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{2at_0 + \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,4}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 + \sqrt{(2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20)^2 + 4 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 6,1 \cdot 10^{-2}}}} \end{aligned} \quad (10)$$

Что немного отличается от значения ранее найденного приближенным графическим способом. При этом единственный корень уравнения (8) (максимальная установившаяся температура) равен:

$$\bar{t}_{\max} = \frac{\beta}{2aU^2} = \frac{1,4}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 15^2} = 62^\circ. \quad (11)$$

Для построения графика зависимости установившейся температуры от приложенного напряжения нужно решить уравнение (8). Для упрощения расчетов можно рассчитать обратную зависимость $U(t)$, которая следует из того же уравнения

$$at^2 + b = \frac{\beta}{U^2}(t - t_0) \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\beta(t - t_0)}{at^2 + b}}. \quad (12)$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1, график этой функции показан на рис. 3

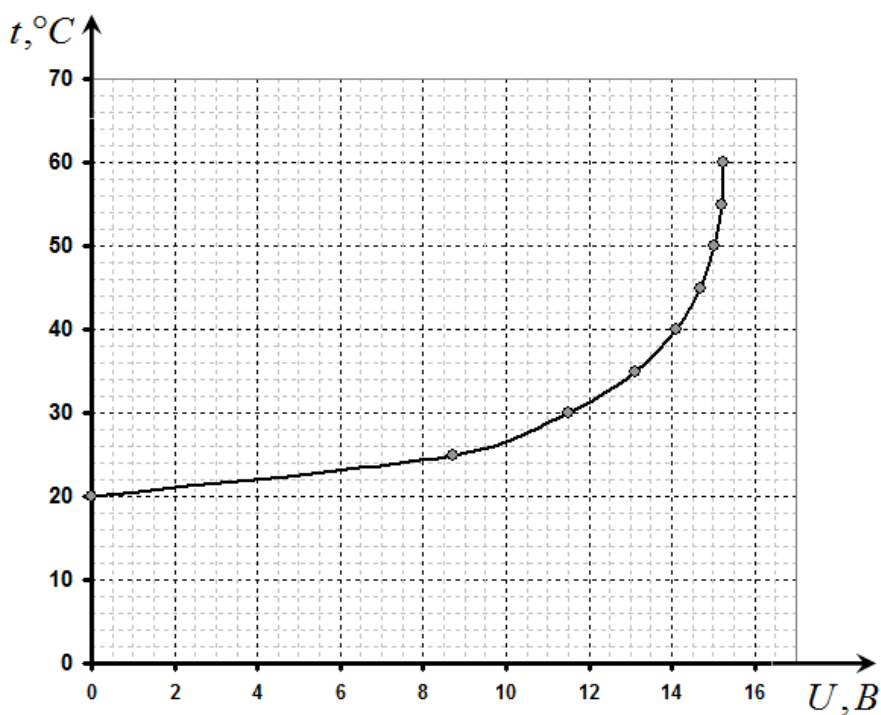
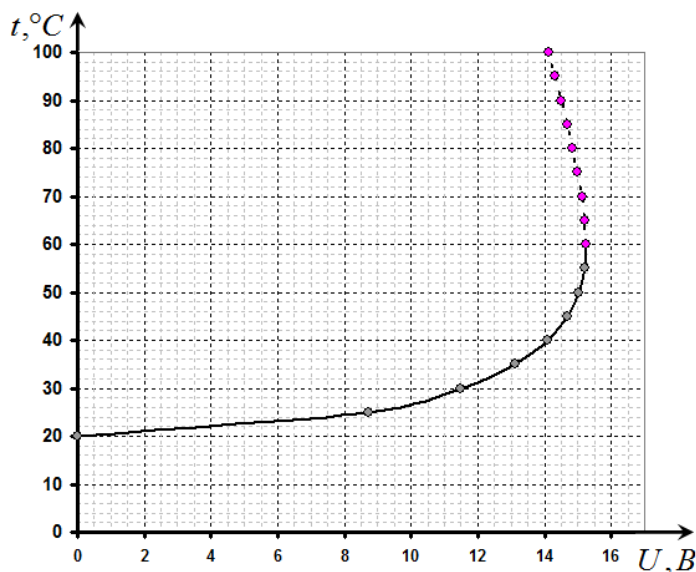


Таблица 1.

$t, ^\circ\text{C}$	U, V
20	0,00
25	8,71
30	11,49
35	13,11
40	14,09
45	14,69
50	15,03
55	15,19
60	15,24

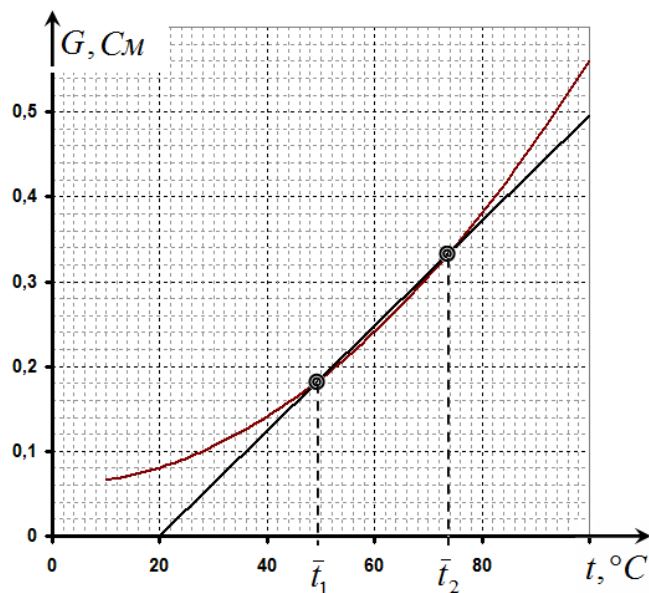
¹ С Точки зрения математики этому корню соответствует вторая касательная в параболе (рис. 2) при этом температура воды должна быть меньше температуры окружающей среды.



Интересно отметить, что данную зависимость можно продолжить, увеличивая значения температур. При этом на графике появится ветвь неустойчивых решений уравнения (8) на рис.4 она указана пунктиром).

7-8. Обратимся еще раз к графику, позволяющему оценивать значения установившихся температур (рис.2). Проведем на нем прямую, соответствующую установившейся температуре $\bar{t} = 50^\circ$ (рис. 5). Видно, что в этом случае помимо устойчивой температуры $\bar{t}_1 = 50^\circ$ существует еще одна стационарная точка² (неустойчивая) $\bar{t}_2 \approx 75^\circ$. По таблице (1) определяем, что этой прямой соответствует напряжение $U = 15$ В. Поэтому при превышении температуры $\bar{t}_2 \approx 75^\circ$ выделяющаяся мощность теплоты постоянно будет превышать мощность тепловых потерь, поэтому воды будет нагреваться до температуры кипения.

Для оценки и расчета времен нагревания необходимо записать уравнение, описывающее изменение температуры воды с течением времени τ :



$$cm\Delta t = (P_1 - P_2)\Delta\tau, \quad (13)$$

Смысл которого очевиден: разность между выделившейся теплотой и теплотой, ушедшей в окружающую среду пошла на нагревание воды. Разность мощностей $(P_1 - P_2)$ зависит от температуры, поэтому строгое решение этого уравнения достаточно сложное. Однако в каждом случае можно провести разумные оценки.

Так при нагревании воды на 1° от комнатной можно пренебречь тепловыми потерями, а мощность выделяющейся теплоты считать постоянной и равной $P_1 = U^2 G(t_0) = 15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 + 6,1 \cdot 10^{-2}) \approx 14$ Вт. Тогда время нагревания оказывается равным

$$\tau_1 = \frac{cm\Delta t}{P_1} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,20}{14} \approx 60 \text{ с.} \quad (14)$$

² При необходимости точное значение этой температуры можно найти из уравнения (8). Проще всего, используя теорему Виета. Из уравнения (8) следует $\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \frac{\beta}{aU^2} = \frac{1,4}{5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 15^2} = 124^\circ$, откуда $\bar{t}_2 = 74^\circ$

При приближении к состоянию равновесия $t \rightarrow \bar{t}_1$ мощность, идущую на нагревание воды нельзя считать постоянной (так как она стремится к нулю), поэтому в этом случае необходимо использовать иное приближение. Обозначим $\delta t = t - \bar{t}_1$ малое отклонение от стационарной температуры. Тогда

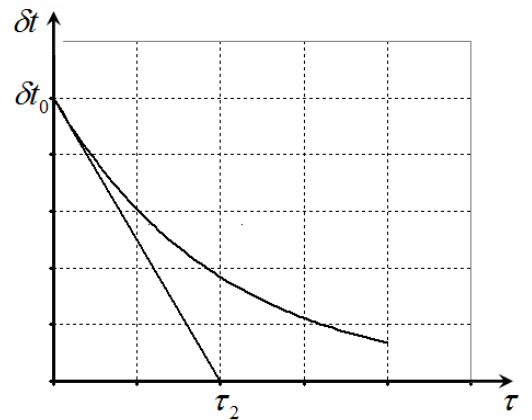
$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) &= U^2 G(\bar{t}_1 + \delta t) - \beta(t + \delta t - \bar{t}_1) = U^2(a \cdot (\bar{t}_1 + \delta t)^2 + b) - \beta(t - \bar{t}_1) = \\ &= (U^2(a\bar{t}_1^2 + b) - \beta(t - \bar{t}_1)) + 2U^2 a \delta t - \beta \delta t + U^2 a \cdot (\delta t)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

В этом выражении первое слагаемое обращается в нуль (так как $\bar{t}_1$ - стационарная точка), последним слагаемым можно пренебречь ввиду малости величины $(\delta t)^2$. Таким образом, уравнение теплового баланса (13) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta(\delta t)}{\Delta \tau} = -\frac{(\beta - 2U^2 a)}{cm} \delta t \quad (16)$$

В этом уравнении постоянный коэффициент равен $\gamma = \frac{(\beta - 2U^2 a)}{cm} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Оценка характерного времени достижения равновесия проводится традиционным способом. Качественный график зависимости отклонения температуры δt от времени имеет вид, показанный на рис. 6. Считая, что скорость изменения температуры постоянна и равна $\gamma \delta t_0$ получаем оценку времени достижения теплового равновесия

$$\tau_2 = \frac{\delta t_0}{\gamma \delta t_0} = \frac{1}{\gamma} \approx 600 \text{ с.} \quad (17)$$



При нагревании воды от 80° до 100° скорость

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P_1 - P_2}{cm} = \frac{U^2(at^2 + b) - \beta(t - t_0)}{cm}, \quad (17)$$

нагреваия изменяется в пределах

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_{80^\circ} &= \frac{15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 80^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) - 1,4 \cdot 60}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,20} = 2,0 \cdot 10^{-3} \frac{K}{c} \\ \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_{100^\circ} &= \frac{15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 100^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) - 1,4 \cdot 80}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,20} = 1,7 \cdot 10^{-2} \frac{K}{c} \end{aligned} \quad (16)$$

Для оценки времени³ нагреваия можно взять среднее значение скорости нагреваия, при этом получаем

$$\tau_3 = \frac{20}{9,5 \cdot 10^{-3}} \approx 2,1 \cdot 10^3 c \approx 35 \text{ мин.} \quad (17)$$

Наконец, при кипении воды ее температура остается постоянной, поэтому рассматриваемые мощности также постоянны, причем

$$(P_1 - P_2)_{100^\circ} = U^2(at^2 + b) - \beta(t - t_0) = 15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 100^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) - 1,4 \cdot 80 \approx 14 \text{ Вт}$$

Следовательно, время выкипания будет равно

$$\tau_4 = \frac{Lm}{(P_1 - P_2)_{100^\circ}} \approx 3,1 \cdot 10^4 c \approx 9 \text{ час.} \quad (18)$$

— ³ Возможны и другие способы оценивания. Например, взять скорость остывания при средней температуре 90° $\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_{80^\circ} \approx 8 \cdot 10^{-3} \frac{K}{c}$. В этом случае оценка времени нагреваия дает примерно 40 мин.