

упругих

Условие

Задача 2. Пружинный газ

Как известно, при изменении объема газа его давление будет также изменяться, что приводит к появлению у газов некоторых «упругих» свойств, который можно использовать, например, для амортизации в различных механизмах. В данной задаче вам предлагается изучить свойства идеального газа, сравнивая его с классическими упругими пружинами.

Часть А. Газ как пружина

Идеальный одноатомный газ, заполняет открытый цилиндрический сосуд с поршнем, который может двигаться практически без трения (рис. 1). Стенки сосуда и поршень хорошо проводят тепло. Система находится в равновесии. Площадь основания цилиндра $S = 200 \text{ см}^2$, начальный объем газа $V_0 = 3,0 \text{ л}$.

Если в такой системе надавить или потянуть за поршень, то можно ощутить некоторые «упругие» силы.

Рисунок 1 – Сосуд с поршнем (к части А)

A1.1. Покажите, что при малых деформациях для системы выполняется закон Гука. Найдите жесткость такой «газовой пружины» при малых деформациях.

A1.2. Получите выражение и значение для модуля Юнга такого «упругого материала» при малых деформациях.

При увеличении деформаций закон Гука перестает выполняться, что можно представить, как изменение жесткости системы.

A1.3. Будет ли жесткость увеличиваться или уменьшаться при увеличении деформации?

Далее, в целях энергосбережения, стенки и поршень решили теплоизолировать. Изучите свойства новой «газовой пружины»:

A2.1. Покажите, что при малых деформациях для системы выполняется закон Гука. Найдите жесткость такой «газовой пружины» при малых деформациях.

A2.2. Получите выражение и значение для модуля Юнга такого «упругого материала» при малых деформациях.

A2.3. Будет ли жесткость увеличиваться или уменьшаться при увеличении деформации?

Часть В. Газ против пружины.

С открытой части к поршню из пункта А2 присоединили «классическую» пружину жесткости $k = 15 \text{ кН/м}$ (рис. 2). Первоначально пружина находится в недеформированном состоянии.

Для того чтобы газ «посоревновался» с пружиной, его нагрели, удерживая поршень на месте, с комнатной температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$ до температуры $T_1 = 80^\circ\text{C}$. Затем поршень резко отпустили.

В1. Пренебрегая массой поршня, найдите температуру газа T_2 после того, как система придет в равновесие.

Рисунок 2 – Сосуд с поршнем и пружиной (к части В)

Подсказки: Физика: Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{моль})$ Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ Атмосферное давление $p_0 = 101 \text{ кПа}$ Плотность сухого воздуха (н.у.) $\rho_v = 1,20 \text{ кг/м}^3$ $0^\circ\text{C} = 273 \text{ К}$ Закон Гука в дифференциальной форме: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, где σ – поверхностное напряжение, E – модуль Юнга материала, ε – относительное удлинение. Математика: Для малых α справедливо: $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots$

Решение

Задача 10-2 Пружинный газ

Часть А. Газ как пружина

Поскольку сосуд открыт, система находится в равновесии, а поршень может двигаться практически без трения, то давление газа изначально равно атмосферному $p_0 = 101 \text{ кПа}$.

А1.1. Предположим газ поршень сдвинули на некоторое малое расстояние Δx . Тогда объем газа станет равен $V_0 + S\Delta x$. Так как стенки сосуда хорошо проводят тепло, то процесс изменения объема можно считать изотермическим, подчиняющемся закону $pV = \text{const}$. Тогда $p_0V_0 = p_1(V_0 + S\Delta x)$, где p_1 – новое давление газа. Отсюда:

$$p_1 = \frac{p_0V_0}{V_0 + S\Delta x}, \text{ где } p_1 - \text{н}$$

$$p_1 = \frac{p_0V_0}{V_0 + S\Delta x} = \frac{p_0}{1 + \frac{S\Delta x}{V_0}}$$

$$p_1 = \frac{p_0V_0}{V_0 + S\Delta x} = \frac{p_0}{1 + \frac{S\Delta x}{V_0}} \approx p_0 \left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0} \right)$$

Рассмотрим силы, действующие на поршень. Это сила атмосферного давления снаружи, сила давления газа изнутри и сила, с которой деформируют газ. По третьему закону Ньютона последняя сила совпадает по модулю с той, что ощущает экспериментатор со стороны поршня, то есть с силой упругости.

Отсюда:

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{д}} - F_{\text{атм}} = p_0S \left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0} \right) - p_0S = -\frac{p_0S^2}{V_0}\Delta x$$

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{д}} - F_{\text{атм}} = p_0S$$

$$-\frac{S\Delta x}{V_0} - p_0S = -\frac{p_0S^2}{V_0}\Delta x$$

В пределе малых деформаций сила упругости линейна по этой деформации, что говорит о выполнимости закона Гука. Полученный коэффициент при Δx и есть жесткость такой «газовой пружины». Она равна:

$$k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0} = 13,5 \text{ кН/м}$$

$$k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0} = 13,5 \text{ кН/м}$$

A1.2. Поверхностное напряжение равно: $\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = -\frac{p_0 S}{V_0} \Delta x$. Относительное удлинение равно: $\varepsilon = \frac{\Delta x}{l} = \frac{S \Delta x}{V_0}$, где l – начальная «длина» газа вдоль направления деформации. Отсюда получаем закон Гука в дифференциальной форме (по модулю):

$$\sigma = p_0 \varepsilon$$

Полученный коэффициент при деформации и есть модуль Юнга. Для «газовой пружины» он оказался равным атмосферному давлению:

$$E_1 = p_0 = 101 \text{ кПа}$$

A1.3. Для того, чтобы рассмотреть отклонение от закона Гука, необходимо вернуться к месту, где использовалось приближение в выражении для давления газа в пункте A1.1 и продлить разложение до квадратичного слагаемого. Тогда для силы упругости получаем выражение:

$$F_{\text{упр}} = -\frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} \right) \Delta x$$

$$k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} \right)$$

$$F_{\text{упр}} = -\frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} \right) \Delta x$$

где за «переменную» жесткость можно считать: $k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} \right)$.

Видно, что результат зависит от типа (знака) деформации: при «растянутом газе» (знак «плюс») с увеличением деформации жесткость будет уменьшаться, при «сжатом газе» (знак «минус») с увеличением деформации жесткость будет увеличиваться.

ся.

A2.1. В данном случае меняется не только давление и объем, но и температура газа. Пусть температура газа при небольшой деформации изменяется на ΔT . Так как стенки сосуда и поршень теплоизолированы, то процесс будет адиабатическим и первое начало термодинамики можно записать в виде $0 = A + \Delta U$,

откуда:

$$p_0 S \Delta x = -\frac{3}{2} \nu R \Delta T$$

где ν — химическое количество газа в сосуде. Будем считать процесс что деформированный газ оказывается в равновесном состоянии. Тогда можно записать уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояния:

$$p_0 V_0 = \nu R T$$

$$p_1 (V_0 + S \Delta x) = \nu R (T + \Delta T)$$

Из последнего выражения с учетом предыдущих двух получаем:

$$p_1 = \frac{\nu R T + \nu R \Delta T}{V_0 + S \Delta x} = \frac{p_0 V_0 - \frac{2}{3} p_0 S \Delta x}{V_0 \left(1 + \frac{S \Delta x}{V_0}\right)} \approx p_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{S \Delta x}{V_0}\right) \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} + \left(\frac{S \Delta x}{V_0}\right)^2\right)$$

$$p_1 = \frac{\nu R T + \nu R \Delta T}{V_0 + S \Delta x} = \frac{p_0 V_0 - \frac{2}{3} p_0 S \Delta x}{V_0 \left(1 + \frac{S \Delta x}{V_0}\right)}$$

Оставляя лишь слагаемые первого порядка малости по деформации, получаем:

$$p_1 = p_0 \left(1 - \frac{5}{3} \frac{S \Delta x}{V_0}\right)$$

Вновь записав силы, действующие на поршень, аналогично пункту A1.1, получим:

$$F_{\text{упр}} = -\frac{5}{3} \frac{p_0 S^2}{V_0} \Delta x$$

$$F_{\text{упр}} = -\frac{5}{3} \frac{p_0 S^2}{V_0} \Delta x$$

Снова видим, что закон Гука при малых деформациях выполняется и жесткость «газовой пружины» равна:

$$k_2 = \frac{5}{3} \frac{p_0 S^2}{V_0} = 22,4 \text{ кН/м}$$

$$k_2 = \frac{5 p_0 S^2}{3 V_0} = 22,4 \text{ кН/м}$$

A2.2. Вводя напряженность и относительное удлинение аналогично пункту A1.2, получим:

$$\sigma = \frac{5}{3} p_0 \varepsilon$$

Отсюда модуль Юнга равен:

$$E_2 = \frac{5}{3} p_0 = 168 \text{ кПа}$$

A2.3. Удержав квадратичное слагаемое разложения в формуле для давления p_1 , получим:

$$F_{\text{упр}} = -\frac{5}{3} \frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} \right) \Delta x$$

$$F_{\text{упр}} = -\frac{5 p_0 S^2}{3 V_0} \Delta x$$

Отсюда «переменная жесткость» равна $k_2 = \frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} \right)$. Снова, как и в пункте A1.3, получаем, что при «растянутом газе» (знак «плюс») с увеличением деформации жесткость будет уменьшаться, при «сжатом газе» (знак «минус») с увеличением деформации жесткость будет увеличиваться.

Часть В. Газ против пружины.

В1. Прежде всего, найдем p_1 — давление газа после изохорного нагрева (не забываем, что температуры должны быть абсолютными, в Кельвинах).

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}$$

Происходящий процесс неравновесный, мы не можем записать уравнение Менделеева-Клапейрона для любого промежуточного состояния газа, однако оно справедливо для начального и конечного равновесных состояний:

$$p_1 V_0 = \nu R T_1$$

$$p_2 (V_0 + S \Delta x) = \nu R T_2$$

где Δx — деформация газа и пружины, p_2 и T_2 — конечные давление и температура. Кроме того, можно записать баланс сил (2-й закон Ньютона) для поршня в конечном положении:

$$p_2 S = k \Delta x + p_0 S$$

Наконец, процесс адиабатический. Газ совершает работу за счет внутренней энергии: $A = -\Delta U$. При этом, пренебрегая массой поршня, работа газа идет только на увеличение потенциальной энергии деформированной пружины. Получаем:

$$\frac{k \Delta x^2}{2} = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2)$$

Объединяя приведенные равенства, можно получить квадратное уравнение относительно Δx :

$$4k \Delta x^2 + 3 \Delta x \left(p_0 S + \frac{k V_0}{S} \right) - 3 p_0 V_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = 0$$

Решать данное уравнение удобно, подставив численные значения коэффициентов. Отбрасывая отрицательный корень (газ расширяется), получаем: $\Delta x = 1,37$ см. Далее, из уравнений Менделеева-Клапейрона и второго закона Ньютона можно получить выражение для искомой температуры:

$$T_2 = T_0 \frac{\left(p_0 + \frac{k \Delta x}{S} \right) (V_0 + S \Delta x)}{p_0 V_0} = 352$$

$$T_2 = T_0 \frac{\left(p_0 + \frac{k \Delta x}{S} \right) (V_0 + S \Delta x)}{p_0 V_0} = 352 \text{ K} = 79^\circ \text{C}$$