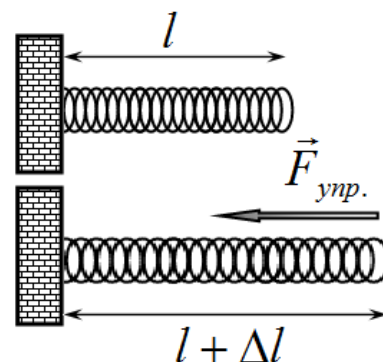


-3 Гук против Архимеда! Часть 1. Вспомним закон Гука

Условие

Задача 9-3 Гук против Архимеда!

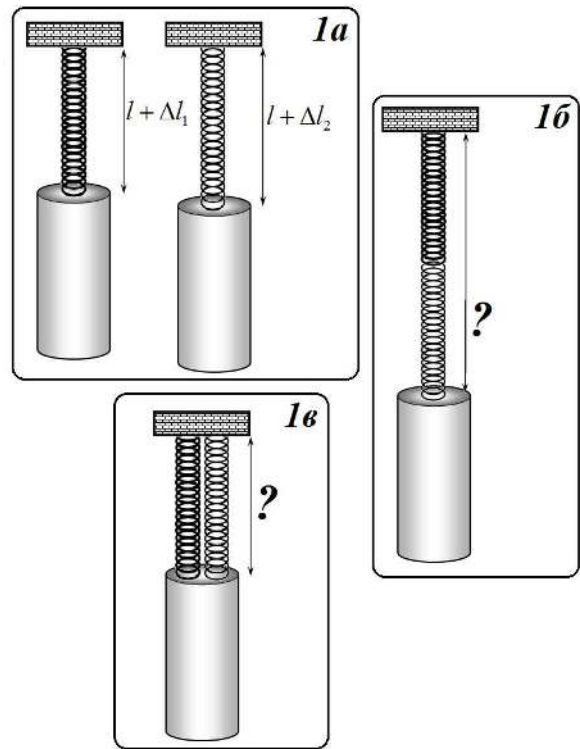


Часть 1. Вспомним закон Гука.

Пусть длина нерастянутой пружины равна l . Если пружину растянуть на некоторую величину Δl , то в пружине возникнет сила упругости, модуль которой равен

$$F_{\text{упр.}} = k\Delta l = kl\eta,$$

где k - жесткость пружины. Величина $\eta = \frac{\Delta l}{l}$ называется относительной деформацией пружины.



Для изучения сил упругости используется массивный цилиндр и две пружины, длины которых в недеформированном состоянии одинаковы. Если цилиндр подвесить на первой пружине, то ее относительная деформация будет равна η_1 , если этот же цилиндр подвесить на второй пружине, то ее относительная деформация будет равна η_2 (рис. 1а).

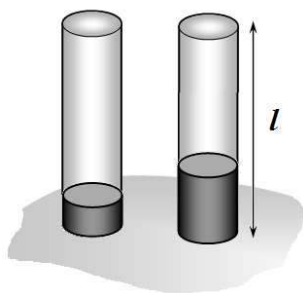
1.1 Чему будет равна относительная деформация пружины, составленной из двух исходных пружин соединенных последовательно (рис. 1б)? 1.2 Чему будет равна относительная деформация пружин, если цилиндр подвесить на двух пружинах, соединенных параллельно (рис. 1в)?

Часть 2. Вспомним закон Архимеда.

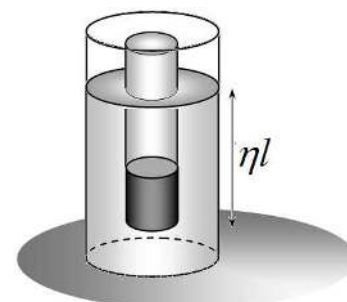
На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости:

$$F_{\text{Арх.}} = \rho_0 g V_1,$$

где ρ_0 - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, V_1 - объем погруженной части тела.

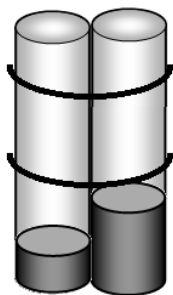


Для изучения закона Архимеда используются два закрытых тонкостенных цилиндрических сосуда, размеры которых одинаковы. Высоты сосудов обозначены l . В нижней части сосудов расположены массивные тела, так, что при погружении сосудов в воду, они могут плавать в ней вертикально.



Если в воду опустить первый сосуд, то глубина его погружения будет равна $\eta_1 l$. Величину η (отношение объема погруженной части к полному объему сосуда) назовем относительным погружением. Если в воду опустить второй сосуд, то глубина его погружения будет равна $\eta_2 l$.

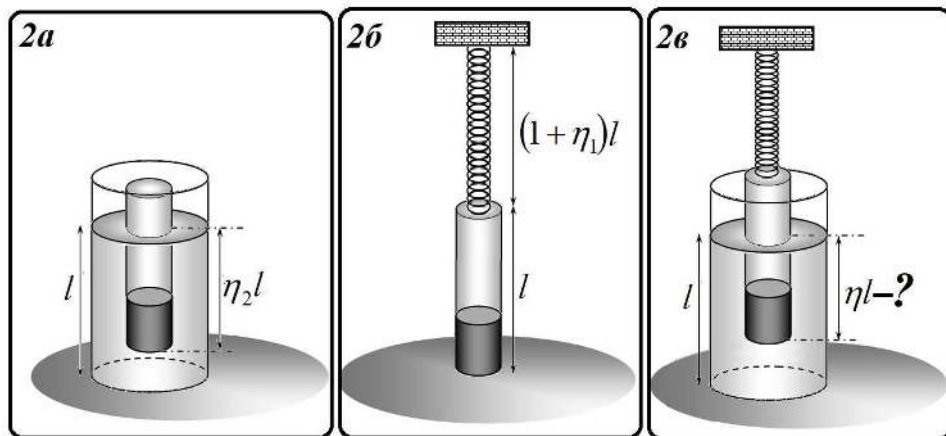
2.1 Чему будет равна относительная глубина погружения сосудов, если их связать «параллельно»? 2.2 Чему будет равна относительная глубина погружения, если сосуды соединить, поставив их один на один?



Часть 3. Гук против Архимеда.

Второй из сосудов, описанных в Части 2 (для которого относительная глубина погружения в воду равна $\eta_2 l$ - рис.2а) подвешивают на пружине, длина которой в недеформированном состоянии l равна высоте сосуда. При этом растяжение пружины оказывается равным $\eta_1 l$. Верхний конец пружины закреплен в штативе, а дно сосуда почти касается поверхности стола (рис. 2б).

Затем, не изменяя точки подвеса пружины, подвешенный сосуд опускают в большую кастрюлю с водой. Высота уровня воды в кастрюле также равна l (и практически не изменяется при погружении сосуда – рис. 3в).



3.1 Найдите относительное погружение η сосуда в воду в этом случае.

3.2 Пусть $\eta_2 = 0,80$. Рассчитайте относительное погружение η при трех значениях 1) $\eta_1 = 0,30$, 2) $\eta_1 = 0,20$, 3) $\eta_1 = 0,10$. Сравните полученные значения с величиной погружения без пружины η_2 . Кратко объясните полученные результаты.

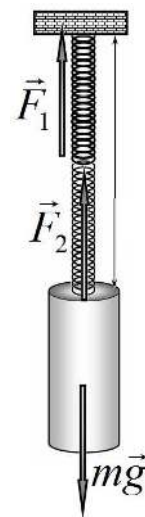
Решение

Задача 9-3 Гук против Архимеда!

Часть 1. Вспомним закон Гука.

Запишем условия равновесия груза на каждой пружине

$$k_1 \eta_1 l = mg k_2 \eta_2 l = mg \quad (1)$$



1.1 Если пружины соединены последовательно, их силы упругости будут равны между собой и равны силе тяжести, действующей на груз. Следовательно, относительные удлинения пружин останутся теми же. Поэтому суммарное удлинение двойной пружины будет равно

$$\Delta l = \eta_1 l + \eta_2 l. \quad (2)$$

Длина составной недеформированной пружины в нерастянутом состоянии равна $2l$, следовательно, ее относительная деформация

$$\eta = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}. \quad (3)$$

1.2 При параллельном соединении пружин их удлинения будут одинаковы, поэтому одинаковы и относительные деформации. Суммарная сила упругости пружин должна уравновешивать силу тяжести, поэтому условия равновесия груза, подвешенного на двух пружинах, имеет вид

$$k_1 \eta l + k_2 \eta l = mg. \quad (4)$$

Выражая из формул (1) значения жесткостей пружин

$$k_1 = \frac{mg}{\eta_1 l}, \quad k_2 = \frac{mg}{\eta_2 l}$$

и подставляя в выражение (4), получим

$$\frac{mg}{\eta_1 l} \eta l + \frac{mg}{\eta_2 l} \eta l = mg \Rightarrow \eta = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}. \quad (5)$$

Отметим, что формуле (5) можно придать «красивый» вид

$$\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{\eta}. \quad (6)$$

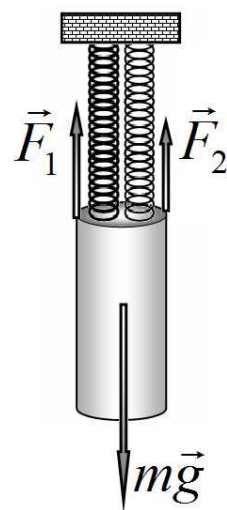
Часть 2. Вспомним закон Архимеда.

Силу тяжести, действующей на каждый сосуд можно выразить из условия плавания каждого из сосудов

$$m_1 g = \rho g V \eta_1, \quad m_2 g = \rho g V \eta_2. \quad (1)$$

Если сосуды связаны, то условия равновесия при плавании имеет вид

$$(m_1 + m_2) g = 2 \rho g V \eta, \quad (2)$$

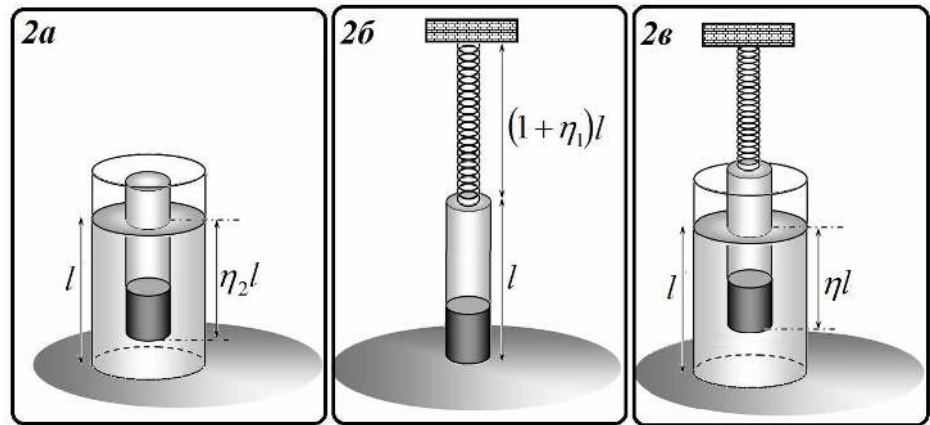


Где η - доля объема погруженной части обоих сосудов. Из этих уравнений следует, что

$$\eta = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}. \quad (3)$$

Заметим, что этот результат не зависит от того, как связаны сосуды (даже если они связаны перпендикулярно!). Так как сила Архимеда в любом случае должна удовлетворять соотношению (2)

Часть 3. Гук против Архимеда.



Сравним положения цилиндра в положениях 2б и 2в: цилиндр приподнялся на высоту $\Delta h = l - \eta l$. При этом уменьшилась сила упругости пружины.

Понятно, что это уменьшение силы упругости скомпенсировано действием силы Архимеда. Эти рассуждения можно выразить уравнением

$$kl(1 - \eta) = \rho g V \eta \quad (1)$$

Неизвестные параметры систему можно выразить из условия плавания (без пружины):

$$mg = \rho g V \eta_2 \Rightarrow \rho g V = \frac{mg}{\eta_2} \quad (2)$$

и условия равновесия на пружине (без воды):

$$mg = kl\eta_1 \Rightarrow kl = \frac{mg}{\eta_1}. \quad (3)$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1) и его последующее решение приводит к требуемому результату:

$$\frac{mg}{\eta_1}(1 - \eta) = \frac{mg}{\eta_2}\eta \Rightarrow \eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}. \quad (4)$$

3.2 Подстановка численных значений дает следующие величины относительного погружения.

1) $\eta_1 = 0,30$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{0,80}{0,80 + 0,30} = 0,73$, что меньше погружения при отсутствии пружины. Следовательно, в новом положении равновесия пружина еще остается растянутой и приподнимает цилиндр.

2) $\eta_1 = 0,20$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{0,80}{0,80 + 0,20} = 0,80$. В этом случае цилиндр плавает на той же глубине, что и без пружины. Не сложно показать, что в этом положении пружина не деформирована, поэтому не оказывает никакого воздействия на плавающий цилиндр.

3) $\eta_1 = 0,10$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{0,80}{0,80 + 0,10} = 0,89$. Здесь пружина оказывается сжатой, поэтому дополнительно вталкивает цилиндр в воду.