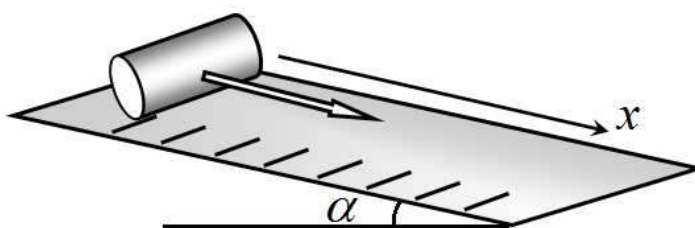


Условие

Задача 11-1 «Докатились?!»

Оборудование: бутылка пластиковая круглая 0,5 л, секундомер с памятью этапов, линейка, мерный стакан, вода, подставка.

В данной задаче Вам необходимо исследовать скатывание тела (пластиковой бутылки) по наклонной плоскости. На столе, покрытом листом бумаги, сделайте разметку шкалы расстояний (ось Ox). Для экспериментального изучения закона движения удобно использовать секундомер с памятью, в которую можно заносить времена прохождения бутылки через сделанные отметки. Слегка наклоните стол, подложив под него подставку.



Воду в бутылку следует добавлять одинаковыми порциями, которые можно отмерять с помощью мерного стакана. При измерениях в каждой части задачи укажите угол наклона стола в радианах.

Часть 1. Качение пустой бутылки.

1.1 Исследуйте закон скатывания пустой бутылки $x(t)$. 1.2 Постройте график полученной зависимости. 1.3 Укажите, на каком интервале движения пустой бутылки можно считать равномерным. 1.4 Определите среднюю скорость скатывания на этом интервале с наибольшей точностью. Оцените погрешность измерения скорости. 1.5 Качественно объясните, почему скатывание бутылки происходит примерно с постоянной скоростью.

Часть 2. Качение полной бутылки.

Бутылку полностью (до горлышка) заполните водой. 1.1 Исследуйте закон движения полной бутылки $x(t)$. 1.2 Постройте график полученной зависимости. 1.3 Покажите, что скатывание заполненной бутылки можно считать равноускоренным. 1.4 Рассчитайте среднее ускорение, с которым скатывается бутылка. Оцените погрешность измерения ускорения.

Предложите такую методику расчета, чтобы исключить влияние погрешностей времени запуска секундомера, начальной координаты и начальной скорости бутылки.

Часть 3. Бутылка «наполовину пустая», или «наполовину полная»?

В данной части задачи не требуется исследовать закон движения. Оценивать погрешности измерения также не требуется.

3.1 Исследуйте зависимость времени скатывания бутылки (на фиксированное расстояние, укажите его!) от объема воды, налитой в бутылку. 3.2 Постройте график полученной зави-

симости. 3.3 Дайте качественное объяснение полученной зависимости, т.е. укажите какие (и как!) основные факторы влияют на время скатывания.

Решение

Задача 11-1 «Докатились?!»

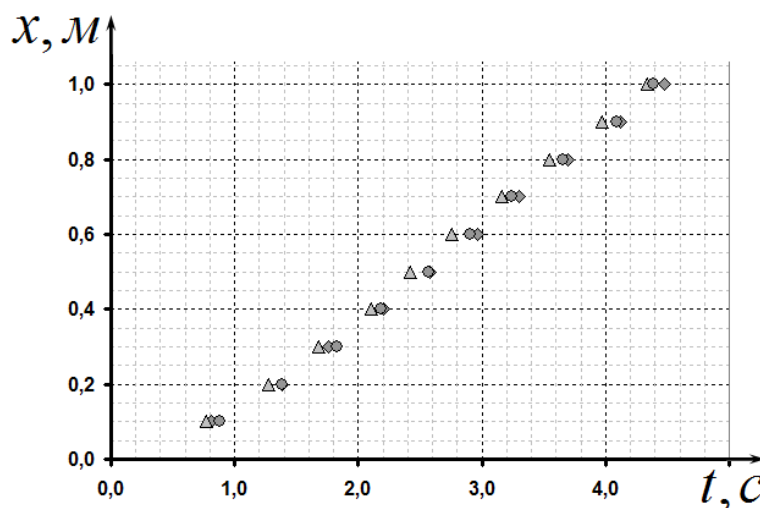
Мы подложили под ножки стола подставку высотой $h = 2$ см, при расстоянии между ножками $l = 1,4$ м, это соответствует углу наклона $\alpha = \frac{h}{l} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}$.

Часть 1. Качение пустой бутылки.

В Таблице 1 приведены результаты измерений времен прохождения t_k пространственных отметок x_k . Измерения проведены 3 раза (*участникам олимпиады достаточно провести 1 серию*). Заметим, что проводить усреднение этих данных не имеет смысла, так как проводятся независимые серии измерений. Справа приведены графики этих зависимостей.

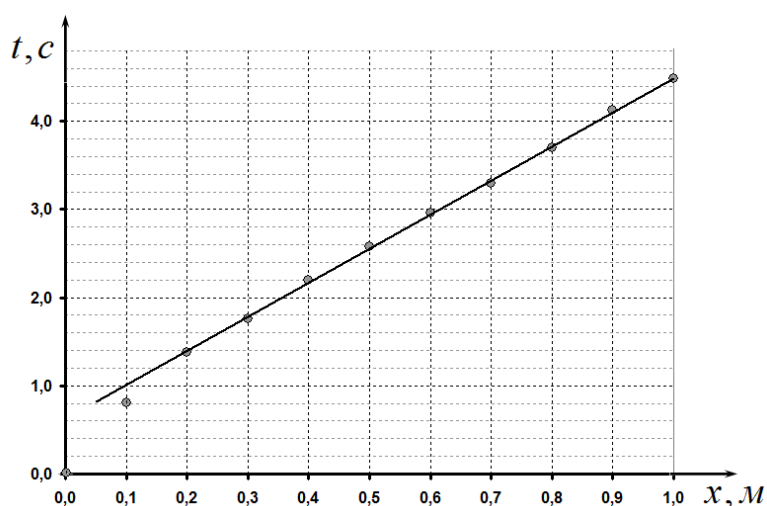
Таблица 1.

x_k , м	t_k , с	t_k , с	t_k , с
0	0	0	0
0,1	0,81	0,77	0,88
0,2	1,38	1,27	1,38
0,3	1,76	1,68	1,83
0,4	2,20	2,10	2,18
0,5	2,58	2,42	2,57
0,6	2,96	2,76	2,91
0,7	3,30	3,16	3,24
0,8	3,70	3,55	3,66
0,9	4,12	3,97	4,09
1	4,48	4,34	4,39



Графики показывают, что после 20 см пройденного пути скатывание можно считать равномерным, так как графики закона движения становятся прямыми.

Для расчета скорости предпочтительнее использовать метод наименьших квадратов. Причем применять его надо к зависимости $t(x)$, так как погрешность измерения времен заметно превышает погрешность измерения расстояний¹. Для дальнейших расчетов использованы данные третьей серии из таблицы 1.



На графике нанесены экспериментальные точки. Хорошо видно, что первая точка отклоняется от линейной зависимости — она попадает на этап разгона. Поэтому линейная зависимость строится по МНК без учета этой точки.

Коэффициенты линейной зависимости $t = cx + b$, рассчитанные по МНК равны

—

¹ Допустимо применять МНК и к зависимости $x(t)$, также пропустив первую точку.

$$c = (3,87 \pm 0,06) \frac{с}{м}$$

$$b = (0,62 \pm 0,04)c$$

Отличие параметра b от нуля объясняется не только погрешностью измерений, но и наличием этапа разгона. Коэффициент c равен величине обратной скорости установившегося движения.

Поэтому скорость установившегося движения равна $v = (0,259 \pm 0,004) \frac{M}{c}$. Таким образом, относительная погрешность измерения менее 2%.

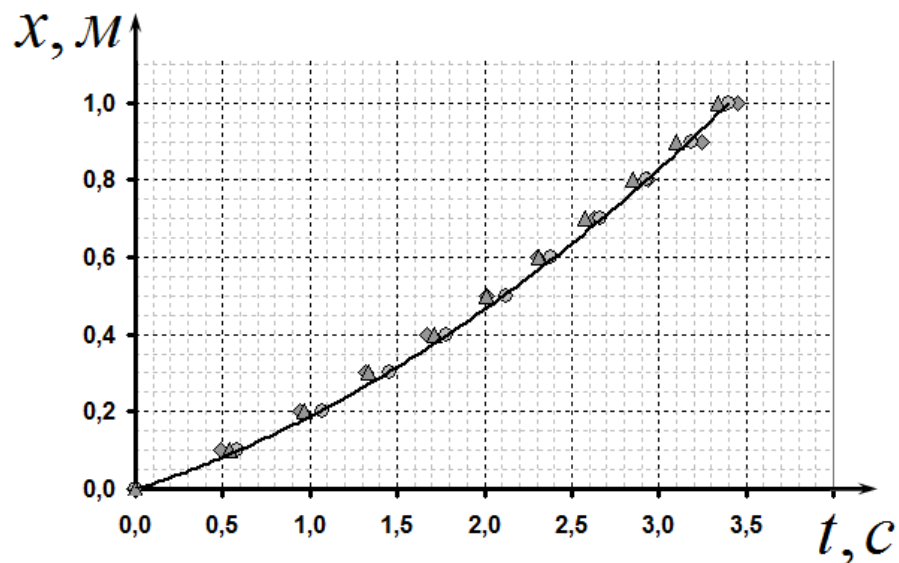
Основной причиной движения с постоянной скоростью, по-видимому, является сила сопротивления воздуха. Заметим, что сила трения качения не приводит к равномерному движению, так как она постоянна. Эта сила может только уменьшить ускорение.

Часть 2. Качение полной бутылки.

В таблице 2 приведены измерения времен прохождения t_k пространственных отметок x_k . Измерения проведены 3 раза (*участникам олимпиады достаточно провести 1 серию*). Справа приведены графики этих зависимостей.

Таблица 2.

x_k , м	t_k , с	t_k , с	t_k , с
0	0	0	0
0,1	0,49	0,58	0,54
0,2	0,94	1,07	0,97
0,3	1,32	1,46	1,34
0,4	1,67	1,78	1,69
0,5	2,01	2,12	2,01
0,6	2,3	2,38	2,31
0,7	2,63	2,66	2,58
0,8	2,94	2,93	2,85
0,9	3,25	3,19	3,10
160	3,45	3,40	3,34

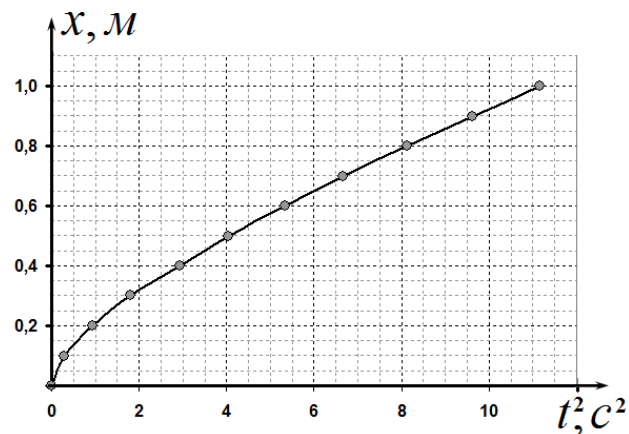


Хорошо видно, что полученные зависимости не являются линейными, но для доказательства того, что движение является равноускоренным, нужен дополнительный анализ. Ниже этот анализ проведен для третьей серии измерения времен.

При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью закон движения имеет хорошо знакомый вид

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Заметим, что «очевидная» линеаризация – построение зависимости координаты от квадрата времени, в данном (как и практически всегда при подобных измерениях) не приводит к успеху. Причиной этого являются неизбежные погрешности в определении начала отсчета,



запуска секундомера, наличие начальной скорости (всегда хочется подтолкнуть!). Подтверждением этот является приведенный график, который трудно назвать линейным. Чтобы исключить указанные погрешности можно поступить следующим образом. Запишем закон движения в виде

$$(x - x_1) = V_0(t - t_1) + \frac{a(t - t_1)^2}{2}, \quad (2)$$

где t_1 время прохождения первой отметки с координатой x_1 . Эту зависимость переписем в виде

$$\frac{(x - x_1)}{(t - t_1)} = V_0 + \frac{a(t - t_1)}{2}, \quad (3)$$

Величина $\langle v \rangle_1 = \frac{(x-x_1)}{(t-t_1)} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ имеет смысл средней скорости на интервале времени $(t - t_1)$, она линейно возрастает с ростом этого интервала. Поэтому эта зависимость также может быть обработана МНК.

В принципе, с чуть большей погрешностью можно обрабатывать зависимость

$$\langle v \rangle_2 = \frac{x}{t} = V_0 + \frac{at}{2}, \quad (4)$$

Правда, в этом случае с большой тщательностью необходимо пускать секундомер в момент прохождения нулевой отметки шкалы координат.

В таблице 3 приведены результаты расчетов для построения зависимостей (3) и (4). Графики этих зависимостей приведены рядом с таблицей.

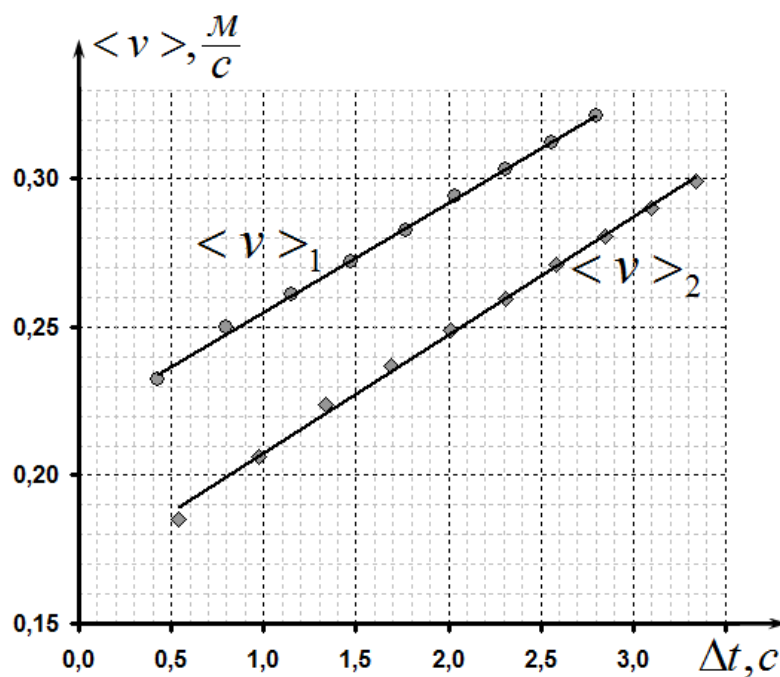


Таблица 3.

$x, \text{ см}$	$t, \text{ с}$	$\langle v \rangle_2$	$\langle v \rangle_1$
0,10	0,54	0,185	
0,20	0,97	0,206	0,233
0,30	1,34	0,224	0,250
0,40	1,69	0,237	0,261
0,50	2,01	0,249	0,272
0,60	2,31	0,260	0,282
0,70	2,58	0,271	0,294
0,80	2,85	0,281	0,303
0,90	3,10	0,290	0,313
1,00	3,34	0,299	0,321

Расчет ускорений по этим зависимостям с использованием МНК приводит к следующим значениям:

по зависимости (3) $a = (7,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \frac{M}{c^2}$;

по зависимости (4) $a = (8,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \frac{M}{c^2}$.

Как видно результаты близки, относительная погрешность составляет величину порядка 4%.

При движении полной бутылки вода практически сразу начинает двигаться как единое целое, поэтому почти не оказывает тормозящего действия. Так как масса полной бутылки

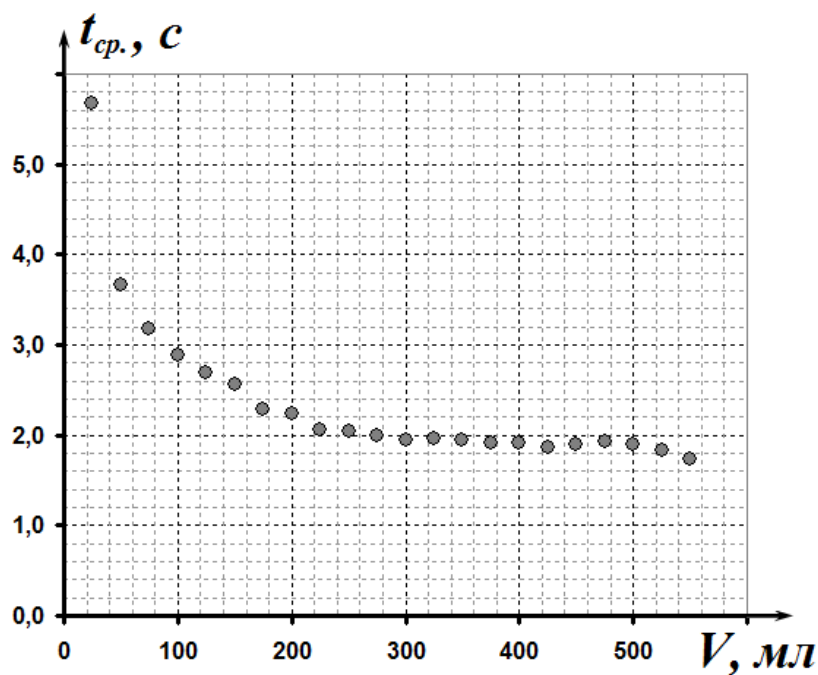
значительно больше массы пустой, влияние силы сопротивления воздуха становится намного меньше.

Часть 3. Бутылка «наполовину пустая», или «наполовину полная»?

Результаты измерений зависимости времени скатывания (проводились на расстоянии 0,5 м) от объема воды, налитой в бутылку приведены в таблице 4. Рядом построен график полученной зависимости. Для каждого объема проведено три измерения, на графике приведены средние значения этих времен

Таблица 4.

V , мл	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с	$t_{\text{ср.}}$, с
25	5,85	5,59	5,61	5,683
50	3,82	3,54	3,65	3,670
75	3,24	3,11	3,17	3,173
100	2,92	2,78	2,95	2,883
125	2,74	2,60	2,72	2,687
150	2,57	2,55	2,58	2,567
175	2,32	2,27	2,26	2,283
200	2,22	2,27	2,21	2,233
225	2,08	2,07	2,03	2,060
250	2,05	2,05	2,04	2,047
275	2,03	2,02	1,95	2,000
300	2,00	1,93	1,93	1,953
325	1,97	1,96	1,94	1,957
350	1,93	1,98	1,91	1,940
375	1,97	1,91	1,88	1,920
400	1,86	1,96	1,93	1,917
425	1,90	1,85	1,85	1,867
450	1,89	1,95	1,87	1,903
475	1,92	1,89	1,97	1,927
500	1,97	1,87	1,84	1,893
525	1,81	1,88	1,83	1,840
550	1,70	1,75	1,77	1,740



Изменение объема воды приводит: - к уменьшению влияния сопротивления воздуха, при увеличении массы налитой воды влияние сопротивления воздуха уменьшается; - изменению влияния сил вязкого трения (сначала они возрастают, а затем начинают уменьшаться – при полной бутылке, как было показано, они не играют решающей роли).

¹ Допустимо применять МНК и к зависимости $x(t)$, также пропустив первую точку.