

-3. Выпад против Эйнштейна?

Условие

Задача 11-3. Выпад против Эйнштейна?

Если Вы находитесь в закрытой кабине лифта, то согласно принципу относительности Г.Галилей, никакими способами не сможете определить, покоится лифт или движется равномерно. Если же лифт движется с ускорением, то это ускорение достаточно легко обнаружить, находясь внутри кабины. Однако, если лифт движется с постоянным ускорением, то согласно принципу эквивалентности А.Эйнштейна, вы никакими способами не сможете отличить ускоренное движение от изменения сил гравитационного взаимодействия. Иными словами, находясь в кабине лифта, вы не в состоянии однозначно сказать: движется лифт с ускорением, или изменилась сила тяжести!

Или, все-таки, сможете?

Часть 1. Два шарика.

Два одинаковых шарика (масса каждого равна m) соединены легкой пружиной (ее жесткость - γ , длина в недеформированном состоянии - l_0 , и значительно больше диаметра шариков). Один из шариков прикрепили к потолку покоящегося лифта, второй свободно свисает на пружине.

	2	
	2	
	2	
53	2	

В некоторый момент времени $t = 0$ лифт начинает подниматься постоянным ускорением $\vec{a}_0$.

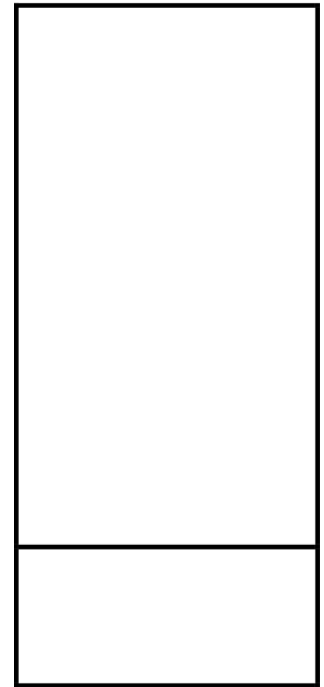
1.1 Найдите закон движения подвешенного шарика $x_2(t)$ в системе отсчета, связанной с потолком лифта.

1.2 Найдите максимальное удлинение пружинки в процессе движения.

После некоторого промежутка времени колебания пружинки затухнут.

1.3 Чему будет равно относительное удлинение пружинки, после того, как ее длина перестала изменяться?

1.4 Чему будет равно относительное изменение силы натяжения пружинки, после прекращения колебаний?



Часть 2. Цепочка.

Цепочка состоит из N звеньев: N легких пружинок жесткостью γ и длиной l_0 в недеформированном состоянии и $N + 1$ шариков массы m , размерами которых можно пренебречь.

2.1 Цепочку подвешивают вертикально за крайний шарик к потоку покоящегося лифта. Найдите относительное (по сравнению с ее длиной L_0 в недеформированном состоянии) удлинение всей цепочки $\frac{\Delta L}{L_0}$ вследствие действия силы тяжести.

Лифт начинает подниматься постоянным ускорением $\vec{a}_0$. В течение некоторого промежутка времени по цепочке будут пробегать упругие волны, которые быстро затухнут.

2.2 Найдите относительное (по сравнению с ее длиной L_0 в недеформированном состоянии) удлинение цепочки после прекращения колебаний всех шариков.

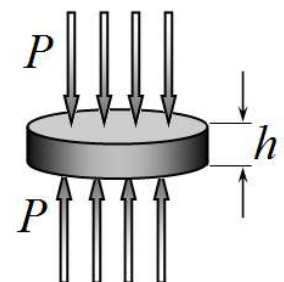
2.3 Чему будет равно относительное изменение сил натяжения пружинок $\frac{\Delta F_k}{F_{k0}}$ (где F_{k0} - сила упругости k -ой пружинки в неподвижном лифте, ΔF_k - изменение этой силы при ускорении лифта).

Часть 3 Сжатие воды.

Если слой жидкости толщиной h_0 поместить под давление P , то его толщина уменьшится и станет равной

$$h = h_0(1 - \beta P),$$

Величина β называется сжимаемостью жидкости. Обычно эта величина мала, поэтому часто жидкости считают несжимаемыми. Однако в некоторых физических явлениях она играет определяющую роль. Для

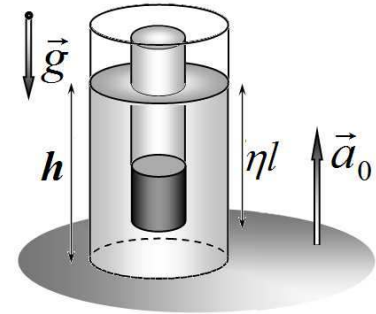


воды сжимаемость равна $\beta = 0,44 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$. Плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

3.1 Определите величину сжатия воды Δh для слоя глубиной h под действием собственного веса. Рассчитайте величину этого сжатия для глубины $h = 10 \text{ км}$.

Часть 4. Смещение поплавка.

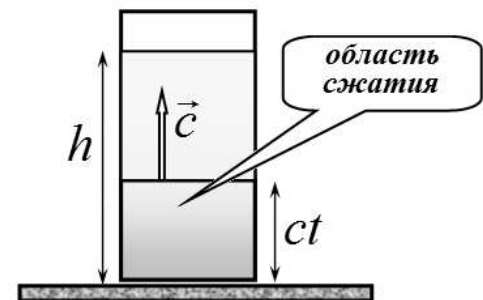
На полу кабины лифта стоит бочка с водой, высота уровня которой равна $h = 1,0 \text{ м}$. В бочке плавает вертикально цилиндрическая пробирка высоты $l = 0,50 \text{ см}$. При этом глубина погружения равна ηl (где $\eta = 0,80$).



Лифт начинает подниматься с постоянным ускорением $a_0 = g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Сразу после начала движения в воде возникнут упругие волны, которые быстро затухают. 4.1 Рассчитайте, на сколько понизится уровень воды в бочке Δh после установления равновесия.

4.2 На сколько процентов изменится плотность воды в бочке при ее ускоренном движении? 4.3 Во сколько раз увеличится давление воды на дно бочки при ее ускоренном движении? 4.4 Чему будет равна глубина погружения пробирки после того, как она перестанет колебаться?

Для описания распространения упругих волн примем следующую упрощенную модель. Будем считать, что граница области дополнительного сжатия распространяется со скоростью звука c (относительно воды). Ниже этой границы вся вода уже движется с постоянным ускорением a_0 , а выше нее еще покоится. Когда граница области сжатия достигает верхнего уровня жидкости, все волновые процессы затухают.



4.5 Данная модель приводит к правильному значению величины сжатия жидкости. Используя ранее найденное значение сжатия, получите формулу для скорости звука в воде, рассчитайте численное значение этой скорости.

4.6 Постройте график зависимости давления внутри воды от глубины в некоторый момент времени, когда волна сжатия еще не достигла верхнего уровня жидкости.

4.7 Рассчитайте максимальное значение скорости пробирки относительно уровня воды в бочке.

Решение

Задача 11-3. Выпад против Эйнштейна?

Часть 1. Два шарика.

При движении с ускорением сила упругости пружинки должна обеспечивать ускорение нижнего шарика, поэтому в положении равновесия должно выполняться условие

$$F = m(g + a_0), \quad (1)$$

Следовательно, в этом положении удлинение пружинки равно

$$\Delta x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma}. \quad (2)$$

Таким образом, смещение от положения прежнего положения равновесия оказывается равным

$$\Delta x_1 = \frac{ma_0}{\gamma}. \quad (3)$$

Эта величина является амплитудой колебаний. Поэтому закон движения шарика (с учетом начальных условий и изображенной оси координат) имеет вид

$$x(t) = -l_0 - \frac{m(g + a_0)}{\gamma} + \frac{ma_0}{\gamma} \cos \omega t. \quad (4)$$

Где $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ - циклическая частота колебаний пружинного маятника. Максимальное удлинение пружинки будет равно (через половину периода колебаний):

$$\Delta x = \frac{m(g + 2a_0)}{\gamma} \quad (5)$$

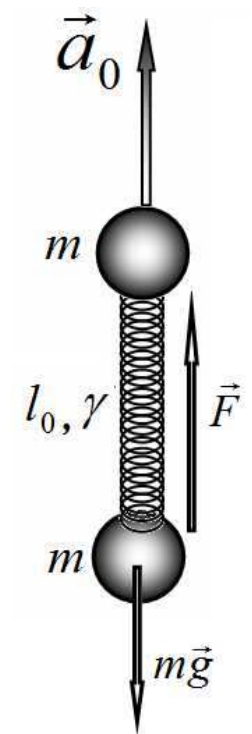
Относительное удлинение после прекращения колебаний:

$$\varepsilon_x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma l_0} \quad (6)$$

может быть мало при большой жесткости пружинки. Относительное изменение силы упругости

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{mg} = \frac{a_0}{g} \quad (7)$$

Не зависит от параметров груза и пружины.



Часть 2. Цепочка.

Рассмотрим пружинку, на которой висит k шариков снизу. Ее удлинение можно найти из условия равновесия

$$\Delta x_k = k \frac{mg}{\gamma}. \quad (8)$$

Так как цепочка содержит N пружинок, то суммарное удлинения находится как сумма арифметической прогрессии

$$\Delta L = \sum_{k=1}^N k \frac{mg}{\gamma} = \frac{mg}{\gamma} \frac{N(N+1)}{2}. \quad (9)$$

Относительное удлинение цепочки

$$\varepsilon_L = \left(\frac{mg}{\gamma} \frac{N(N+1)}{2} \right) / Nl_0 = \frac{mg(N+1)}{2\gamma l_0}. \quad (10)$$

При большом числе шариков эта величина может быть выражена как

$$\varepsilon_L = \frac{mg(N+1)}{2\gamma l_0} \approx \frac{mgL_0}{2\gamma l_0^2}. \quad (11)$$

Т.е. относительное удлинение пропорционально начальной длине.

При движении с ускорением можно получить аналогичные формулы, заменяя g на $(g + a_0)$. Поэтому

$$\varepsilon_L = \frac{m(g + a_0)(N + 1)}{2\gamma l_0} \approx \frac{m(g + a_0)L_0}{2\gamma l_0^2}. \quad (12)$$

Относительные изменения сил натяжения всех пружинок будут одинаковыми и равными

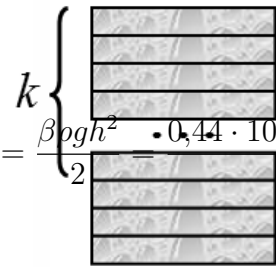
$$\frac{\Delta F_k}{F_{k0}} = \frac{a_0}{g}. \quad (13)$$

Часть 3 Сжатие воды.

Разобьем слой недеформированной воды на тонкие слои толщиной Δh . Их общее число равно $N = \frac{h}{\Delta h}$. Рассмотрим слой, над которым находится k слоев. Его сжатие будет равно $\delta x_k = \beta \Delta h P_k = \beta \Delta h \cdot k \rho g \Delta h$

Суммируя сжатия всех слоев (с учетом того, что их очень много), получим

$$\Delta h = \sum_{k=1}^N \delta x_k = \beta \rho g (\Delta h)^2 \sum_{k=1}^N k = \beta \rho g (\Delta h)^2 \frac{N(N+1)}{2} \approx \frac{\beta \rho g (N \Delta h)^2}{2} = \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{0,44 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1^2}{2} \quad (14)$$



Из-за малой сжимаемости $\Delta h \ll h$, поэтому не принципиально какую глубину подставлять в эту формулу: сжатой, или недеформированной.

Часть 4. Смещение поплавка.

Понижение уровня воды можно рассчитать с помощью формулы (14) и также, используя замену $g \rightarrow g + a_0 = 2g$:

$$\Delta h = \frac{2\beta \rho g h^2}{2} - \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{0,44 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1^2}{2} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ м.} \quad (15)$$

Эта величина крайне мала, поэтому относительное изменение (увеличения) плотности равно относительному изменению (уменьшению) объема

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta h}{h} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} = 2,2 \cdot 10^{-4} \%. \quad (16)$$

Что также составляет крайне малую величину, по сравнению с изменением силы давления на дно, которая увеличится в 2 раза.

Изменение глубины погружения связано изменением плотности воды:

В покоящемся лифте (l_1 - глубина погружения, S - площадь поперечного сечения пробирки) справедливо уравнение

$$mg = \rho gl_1 S. \quad (17)$$

В ускоренно движущемся лифте -

$$2mg = 2\rho(1 + \varepsilon_\rho)g(l_1 + \delta l_1)S \quad (18)$$

Из этих уравнений следует, что пробирка поднимется на величину

$$\delta l_1 = \varepsilon_\rho l_1 = \varepsilon_\rho \eta l = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,80 \cdot 0,50 \approx 8,8 \cdot 10^{-7} \text{ м} \quad (19)$$

Далее будем рассматривать все процессы в системе отсчета, связанной с лифтом

В рамках описанной модели распространения области сжатия (или области повышенного давления), процесс сжатия воды будет происходить, пока волна сжатия не достигнет поверхности воды. В течение этого промежутка времени $t = \frac{h}{c}$ дно движется с ускорением g , а верхняя поверхность еще покоится, поэтому

$$\Delta h = \frac{\beta \rho g h^2}{2} = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{h}{c} \right)^2. \quad (20)$$

Откуда следует правильная формула для скорости упругих волн:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta}} = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (21)$$

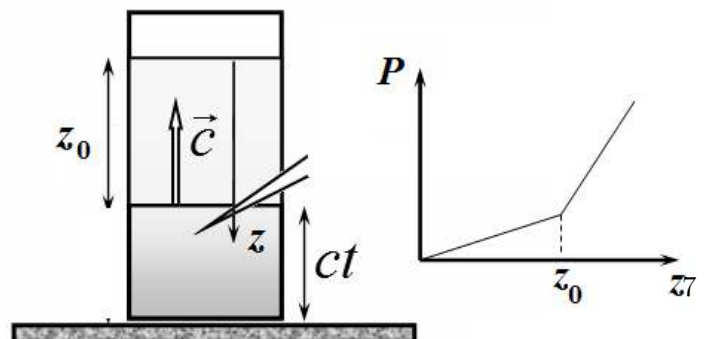
Пусть в некоторый момент времени область повышенного давления достигла глубины z_0 . Тогда ниже этой области изменение гидростатического давления определяется по формуле

$$\Delta P = \rho(g + a_0)\Delta z = 2\rho g\Delta z \quad (16)$$

А выше его (где вода «еще не почувствовала» ускорения) изменение давления остается прежним

$$\Delta P = \rho g\Delta z \quad (17)$$

Поэтому распределение давления по глубине будет иметь вид, показанный на рисунке. Пусть волна сжатия достигла нижнего края пробирки. В этот момент пробирка начнет «чувствовать» действие повышения давления. Далее давление на дно



пробирки будет возрастать по закону в течение промежутка времени $\tau = \frac{\eta l}{c}$

$$p = 2\rho gct + \rho g(\eta l - ct) = \rho g\eta l + \rho gct \quad (22)$$

суммарная сила, действующая на пробирку, будет равна (с учетом силы тяжести $mg = \rho g\eta l S$):

$$F = -mg + (\rho g\eta l + \rho gct)S = mg\frac{ct}{\eta l} \quad (23)$$

Считая этот промежуток малым, найдем импульс, который получит пробирка. Так как сила изменяется со временем по линейному закону, то для подсчета импульса силы можно взять ее среднее значение за время действия силы- пока волна не достигла поверхности воды. Поэтому на основании 2 закона Ньютона в импульсной форме можно записать (в системе отсчета, связанной с Землей)

$$mv = \frac{1}{2}mg\frac{c\tau}{\eta l} \cdot \tau \Rightarrow v = \frac{\eta gl}{2c} = \frac{0,80 \cdot 9,8 \cdot 0,50}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^3} \approx 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (24)$$

Так как в этот момент поверхность воды еще покоится, то это и будет максимальная скорость пробирки относительно поверхности воды.

Выводы делайте самостоятельно!

	2	
	2	
	2	
	2	
53		