

-1 Подобие и размерность

Условие

Задача 11-1 Подобие и размерность.

Теория подобия позволяет на основе анализа уравнений движения устанавливать некоторые закономерности движения без непосредственного решения уравнений. Рассмотрим пример получения закона Кеплера:

Планета движется в поле тяжести звезды. Ускорение планеты:

$$\vec{a} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Изменим пространственный и временной масштаб в α и β раз соответственно: $\tilde{t} = \frac{t}{\beta}$ и $\tilde{x} = \frac{x}{\alpha}$. (При этом α и β имеют смысл новых единиц измерения расстояния и времени). В этой системе скорость будет отличаться в $\frac{\beta}{\alpha}$ раз ($\tilde{v} = \frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta \tilde{t}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} v$), а ускорение в $\frac{\beta^2}{\alpha}$ раз. Тогда уравнение движение в этой системе единиц ($\tilde{\vec{a}} = -\frac{GM\tilde{\vec{r}}}{\tilde{r}^3}$), можно записать следующим образом:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \vec{a} = -\alpha^2 \frac{GM\vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

Чтобы решения уравнений (1) и (2) были одинаковыми (орбиты были подобными), необходимо равенство $\alpha^3 = \beta^2$. А значит, куб изменения пространственного масштаба должен быть равен квадрату временного.

Таким образом, можно сделать вывод, что при движении планет по подобным орбитам кубы характерных размеров орбит (больших полуосей) должны относиться как характерные времена движения по ним (периоды обращения).

Аналогичное доказательство можно провести, рассматривая уравнение закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = E$$

При изменении масштабов, получим:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{mv^2}{2} - \alpha \frac{GMm}{r} = E,$$

или

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha^3}{\beta^2} \frac{GMm}{r} \right) = E,$$

т. е. при $\alpha^3 = \beta^2$ уравнение будет иметь такой же вид, а значит, и аналогичное решение, т.е. движение будет подобным.

1. Шарик совершает колебания на резиновой веревке. Сила упругости, действующая на шарик, прямо пропорциональна квадратному корню от удлинения: $F_{\text{упр}} = k\sqrt{x}$. Как зависит период таких колебаний от амплитуды?

2. Тело падает без начальной скорости в центральном поле сил притяжения, причем потенциальная энергия падающего тела изменяется по закону:

$$U = C \cdot r^n,$$

где r - расстояние до центра действия силы, C и n - постоянные величины.

Как зависит время падения тела в центр действия силы от начального расстояния?

3. В колебательном контуре конденсатор является нелинейным элементом (вместо диэлектрика, например, установлен полупроводник с $p-n$ переходом). При этом напряжение и заряд на конденсаторе связаны соотношением $U = Cq^2$. Определите, как зависит период электромагнитных колебаний в такой системе от начального заряда на конденсаторе.

Решение

Задача 11-1 Подобие и размерность.

1. Запишем Второй закон Ньютона:

$$ma = -k\sqrt{x} + g. \quad (1)$$

При изменении пространственного и временного масштабов, уравнение примет вид:

$$m\frac{\beta^2}{\alpha}a = -k\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{x} + \frac{\beta^2}{\alpha}g. \quad (2)$$

Заметим, что коэффициент $\frac{\beta^2}{\alpha}$ должен также присутствовать при ускорении свободного падения. А можно было сразу отбросить слагаемое g , т.к. известно, что наличие постоянной силы приводит только к смещению положения равновесия. Уравнение (2) будет таким же, как и (1) при условии, что:

$$\beta^2 = \sqrt{\alpha}. \quad (3)$$

Т.е. период колебаний будет пропорционален корню четвертой степени от амплитуды:

$$T \sim \sqrt[4]{A}. \quad (4)$$

2. Полная энергия падающего тела:

$$\frac{mv^2}{2} + C \cdot r^n = E \quad (5)$$

В новых единицах измерения:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{mv^2}{2} + C \frac{1}{\alpha^n} r^n = E \quad (6)$$

или

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{mv^2}{2} + C \frac{\alpha^{2-n}}{\beta^2} r^n \right) = E. \quad (7)$$

Следовательно, одинаковость решений реализуется при:

$$\beta^2 = \alpha^{2-n}. \quad (8)$$

Время падения в силовой центр:

$$T \sim A^{1-n/2}. \quad (9)$$

3. Уравнение колебаний имеет вид:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} + C q^2 = 0. \quad (10)$$

Выбрав новые единицы измерения времени и заряда ($\tilde{q} = \frac{q}{a}$), получим:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} L \frac{\Delta I}{\Delta t} + C \frac{1}{\alpha^2} q^2 = 0. \quad (11)$$

Одинаковое решение (10) и (11) будет при:

$$\beta^2 = 1/\alpha. \quad (12)$$

Таким образом, период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из амплитуды заряда на конденсаторе:

$$T \sim 1/\sqrt{\alpha}. \quad (13)$$