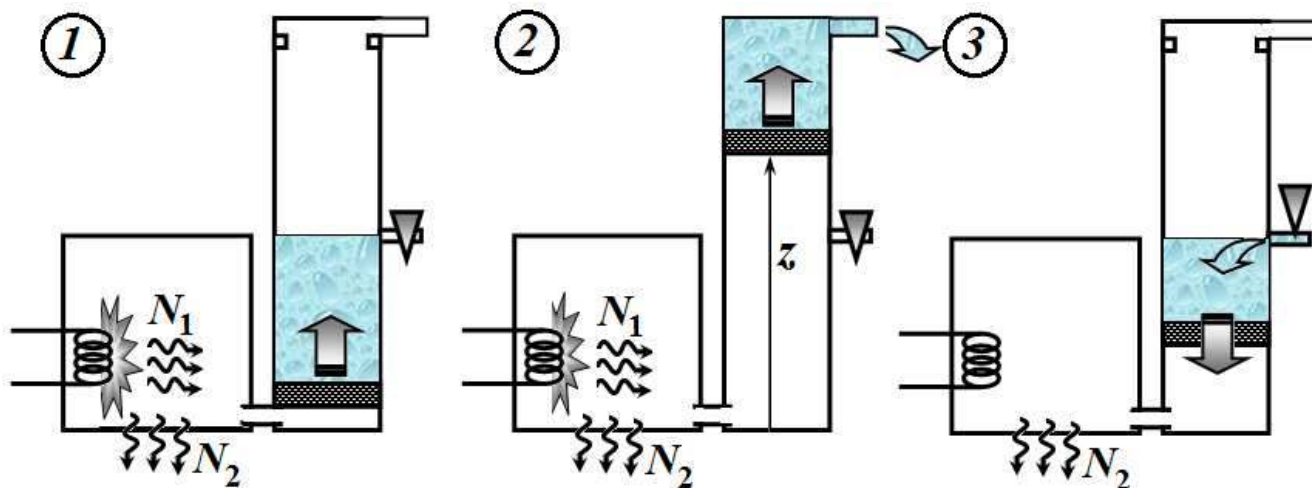
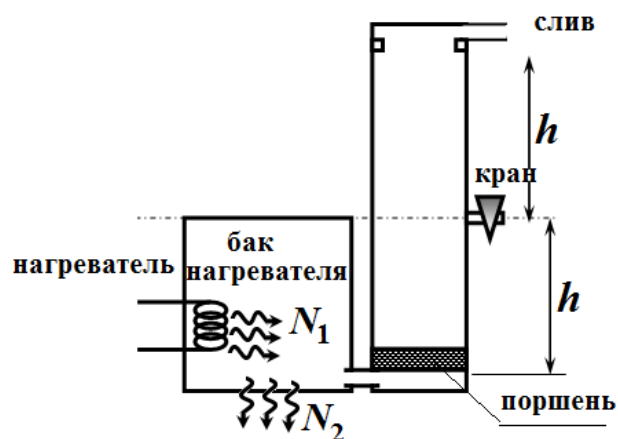


-3 Сначала думать, а потом делать!

Условие

Задача 10-3 Сначала думать, а потом делать!

Молодой, но талантливый физик Федя соорудил на даче тепловую водоподъемную машину. Ее конструкция и принцип действия просты. Цилиндрическая закрытая труба наполовину закопана в землю. Внутри трубы находится массивный плотно пригнанный поршень, который может двигаться по трубе, для ограничения его движения внутри трубы Федя расположил небольшие упоры. На уровне земли к середине трубы подведена трубка с краном, по которой в трубу может поступать вода. В верхней части трубы находится трубка для слива воды. Рабочим телом машины служит воздух. Чтобы уменьшить температуру, до которой следует нагревать воздух, к трубе подсоединен цилиндрический бак нагревателя с расположенным внутри электрическим нагревателем.



Описание работы машины начнем с начального состояния 1: поршень находится внизу, вода заполняет половину трубы (до уровня земли), кран закрыт, нагреватель включен, поршень начинает подниматься, поднимая воду.

После того, как поршень прошел половину трубы (рис. 2), вода начинает выливаться сверху. Когда поршень достигает верхней точки, вся вода выливается, после этого нагреватель отключается и поршень начинает опускаться вниз, после того как он опустится ниже уровня земли Федя открывает кран и наливающаяся вода помогает поршню опуститься до нижнего положения (рис. 3). После этого процесс повторяется.

Как ни странно, машина заработала, но не так как хотелось бы Феде. Поэтому он решил провести теоретические расчеты, описывающие работу этой машины.

Прodelайте и Вы эти расчеты. Для них могут понадобиться следующие данные:

- площадь поперечного сечения трубы (и поршня) $S = 1,0 \text{ м}^2$; - радиус бака нагревателя в три раза больше радиуса трубы, а высота в два раза меньше; расстояние от дна трубы до уровня земли $h = 1,0 \text{ м}$, такая же высота от уровня земли до сливной трубы; - масса поршня $m = 1,0 \cdot 10^3 \text{ кг}$, его толщиной можно пренебречь по сравнению с высотой трубы; - мощность нагревателя постоянна и равна $N_1 = 5,0 \text{ кВт}$;
- считайте, что от рабочего воздуха в землю постоянно (не зависимо от температуры воздуха¹) уходит теплота, мощность этих потерь равна $N_2 = 1,0 \text{ кВт}$;
- плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- атмосферное давление постоянно и равно $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1,0 \text{ атм}$;
- ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;
- молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $C_V = \frac{5}{2}R$, (R - это не радиус трубы, а газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$);
- считайте, что масса воздуха в баке нагревателя и под поршнем остается постоянной, кроме того считайте, что в любой момент времени, на любой стадии процесса температура этого воздуха везде одинакова (т.е. все процессы являются равновесными);
- температура воздуха в баке нагревателя, когда поршень находится в нижнем положении (труба наполовину заполнена водой) и поршень начинает подниматься равна $T_1 = 300 \text{ К}$;
- объемом воздуха под поршнем в нижнем положении и объемом соединительной трубки, трением поршня о стенки трубы, сопротивлением воздуха, вязкостью воды, зависимостью ускорения свободного падения от высоты и т.д. можно пренебречь.

Часть 1. Термодинамика тепловой машины.

1.1 Чему равно количество вещества рабочего воздуха (сколько молей)? **1.2** Рекомендуем измерять давление в атм (атмосферах). Чему равно (в атм) гидростатическое давление воды p_0 на поршень в нижнем положении? Какое давление p_1 (в атм) оказывает поршень на воздух? **1.3** Постройте диаграмму циклического процесса, совершаемого воздухом, в координатах: P (давление в атм) - z (высота поршня над дном рабочей трубы). **1.4** Постройте эту же диаграмму в координатах T - z . **1.5** Рассчитайте коэффициент полезного действия этой машины.

Часть 2. Кинематика тепловой машины.

2.1 Постройте график зависимости координаты поршня z от времени. **2.2** Чему равна средняя мощность этой машины? **2.3** Чему равно отношение средней мощности, развиваемой машиной к средней мощности, потребляемой нагревателем? Сравните это отношение с рассчитанным ранее КПД. Объясните различие между ними.

Проделав все расчеты, еще раз печально осмотрев свое творение, Федя сдал его в металлолом и на вырученные деньги по совету друзей купил насос «Ручеек» белорусского производства.

—
¹ Конечно, приближение не очень хорошее, но Федя, как и Вы не умеет еще решать дифференциальные уравнения!

Решение

Задача 10-3 Сначала думать, а потом делать!

Часть 1. Термодинамика тепловой машины.

Рассчитаем необходимые для дальнейшего параметры машины: Гидростатическое давление воды:

$$p_0 = \rho gh = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,10 \text{ атм}; \quad (1)$$

Давление поршня:

$$p_1 = \frac{mg}{S} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,10 \text{ атм}; \quad (2)$$

Объем бака нагревателя:

$$V_0 = S \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 h = 9,0 \text{ м}^3; \quad (3)$$

Количество молей рабочего воздуха (из уравнения состояния $PV = \nu RT$):

$$\nu = \frac{PV}{RT} = \frac{(P_0 + p_0 + p_1)V_0}{RT_1} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 9}{8,31 \cdot 300} = 433 \text{ моль}. \quad (4)$$

1.3 Построим теперь диаграмму процесса работы водоподъемной машины. Для удобства дальнейших расчетов параметры рабочего воздуха в узловых точках будем заносить в Таблицу 1, сразу же рассчитывая и их численные значения. Объемы и давления в этих точках определяются устройством машины, а температуру удобно рассчитывать с помощью уравнения Клапейрона

$$T = T_1 \frac{PV}{P_1 V_1}. \quad (5)$$

В этой формуле давления можно считать в атмосферах. Объем газа при конкретном значении z равен $V = V_0 + Sz$, численно $V = (9 + z)$. Результаты очевидных расчетов приведены в таблице и «без комментариев»

В начальном состоянии 1, давление газа должно обеспечить подъем поршня, поэтому равно $P_0 + p_0 + p_1$, объем равен объему бака, температура задана.

До тех пор, пока вода не начнет выливаться (то есть пока z не достигнет значения h), процесс расширения будет изобарным (участок 1-2).

После того, как вода начнет выливаться давление будет убывать по линейному закону (участок 2-3):

$$P_{2 \rightarrow 3}(z) = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}(z - h) = P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z = 1,3 - 0,1z \quad (6)$$

При этом температура будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} T_{2 \rightarrow 3}(z) &= T_1 \frac{PV}{P_1 V_1} = T_1 \frac{(P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z)(V_0 + Sz)}{(P_0 + p_0 + p_1)V_0} = 300 \frac{(1,3 - 0,1z)(9 + z)}{1,2 \cdot 9} = \\ &= 27,8(1,3 - 0,1z)(9 + z) \end{aligned} \quad (7)$$

Важно отметить, что эта зависимость квадратичная, причем с отрицательным коэффициентом при высшей степени, поэтому имеет точку экстремума. Но Феде «повезло» - точка экстремума (которую для параболы можно найти, как середину отрезка между корнями. Она оказалась равной $z^* = \frac{13 - 9}{2} = 2$, точно на конце рассматриваемого интервала. Следовательно, на всем участке 2-3 температура возрастает.

На следующем участке 3-4 процесс также изобарный, давление равно сумме атмосферного давления и давления, оказываемого поршнем.

Наконец, на последнем участке, когда вода наливается, давление возрастает по линейному закону

$$P_{4 \rightarrow 1}(z) = P_1 + \frac{P_4 - P_1}{z_4}z = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z = 1,2 - 0,1z. \quad (8)$$

Температура на участке изменяется по закону

$$\begin{aligned} T_{4 \rightarrow 1}(z) &= T_1 \frac{PV}{P_1 V_1} = T_1 \frac{(P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z)(V_0 + Sz)}{(P_0 + p_0 + p_1)V_0} = 300 \frac{(1,2 - 0,1z)(9 + z)}{1,2 \cdot 9} = \\ &= 27,8(1,2 - 0,1z)(9 + z) \end{aligned} \quad (9)$$

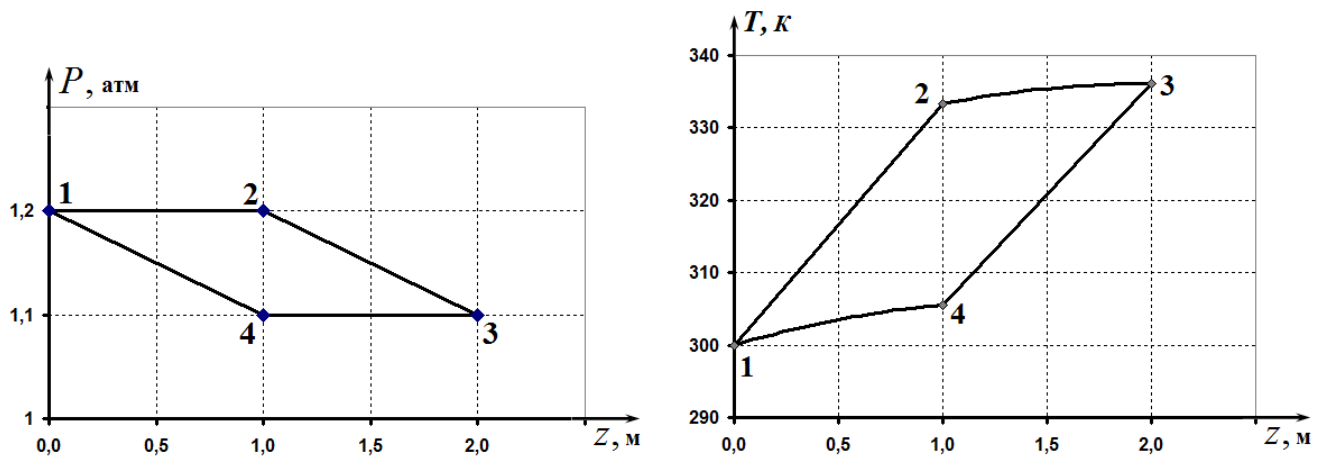
Экстремум этой функции также лежит вне пределов рассматриваемого интервала.

Таблица 1 Состояния

N_2	$P \text{ (атм)}$		$V \text{ (м}^3\text{)}$		$T \text{ (К)}$	
1	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	V_0	9	T_1	300
2	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	$V_0 + Sh$	10	$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$	333
3	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + 2Sh$	11	$T_3 = T_1 \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1}$	336
4	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + Sh$	10	$T_4 = T_1 \frac{P_4 V_4}{P_1 V_1}$	306

N_2	$P \text{ (атм)}$		$V \text{ (м}^3\text{)}$		$T \text{ (К)}$	
1	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	V_0	9	T_1	300
2	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	$V_0 + Sh$	10	$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$	333
3	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + 2Sh$	11	$T_3 = T_1 \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1}$	336
4	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + Sh$	10	$T_4 = T_1 \frac{P_4 V_4}{P_1 V_1}$	306

Диаграммы процессов в требуемых координатах показаны на рисунке.



Проведем расчет термодинамических характеристик всех участков циклического процесса. Результаты расчетов (в том числе численных) также удобно заносить в таблицу 2. Изменение внутренней энергии газа удобно (и быстро) рассчитывать по формуле

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \Delta(PV). \quad (10)$$

Если подставить численные значения параметров, то эта формула упрощается

$$\Delta U = \frac{5}{2} \Delta(PV) = 250 \Delta(PV) \text{ кДж},$$

при давлении в атм.

Работу на каждом участке легко рассчитать, как площадь под графиком соответствующего участка на диаграмме (P, z) . Количество теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершенной работы. Удобно в таблицу заносить все эти величины с учетом

знака, считая всегда работу, совершенную газом и теплоту, полученную газом (т.е. если газ отдает теплоту, она автоматически оказывается отрицательной). Результаты расчетов приведены в Таблице 2. **Таблица 2 Процессы**

Процесс	Уравнение	ΔU , кДж	A , кДж	Q , кДж
1-2	$P = P_0 + p_0 + p_1$	+300	+120	+420
2-3	$P = P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z = 1,3 - 0,1z$	+25	+115	+140
3-4	$P = P_0 + p_1$	-275	-110	-385
4-1	$P_{4 \rightarrow 1}(z) = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h}z = 1,2 - 0,1z$	-50	-115	-165
	Сумма	0	10	10

Последняя «суммирующая» строка позволяет проконтролировать правильность расчетов: суммарное изменение внутренней энергии равно нулю, а суммарная работа равна суммарному количеству теплоты. Теперь легко вычислить коэффициент полезного действия машины (суммируя только положительные значения количеств теплоты)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{10}{560} = 0,018 = 1,8\%. \quad (11)$$

Совсем малая величина!

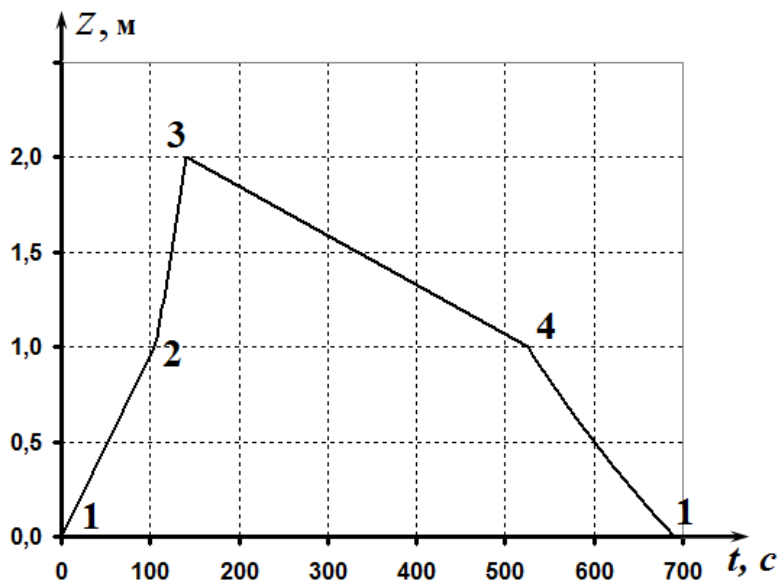
Часть 2. Кинематика тепловой машины.

Для расчета кинематических характеристик движения поршня следует учесть, что мощности поступающей и теряемой теплоты постоянны. Поэтому на участке нагрева время достижения какого-либо состояния определяется по формуле

$$t = \frac{Q}{N_1 - N_2}, \quad (12)$$

Где Q - количество теплоты, полученной от начала процесса до этого состояния. При остывании времена можно рассчитывать по аналогичной формуле

$$\Delta t = \frac{|\delta Q|}{N_2}, \quad (13)$$



На участках 1-2 и 3-4 количество теплоты изменяется с изменением координаты по линейному закону, следовательно, на этих участках поршень движется равномерно. Строго говоря, на участках 2-3 и 4-1 движение является неравномерным, так Q зависит квадратично от координаты. Однако, из диаграммы процесса (T, z) видно, что эта зависимость близка к линейной. Поэтому можно приближенно считать и здесь движение равномерным. На

рисунке показан график закона движения (рассчитанный точно). Видно, что, действительно, отклонения от линейного закона незначительны, причем времена в узловых точках рассчитываются точно, независимо от закона движения поршня.

Общее время совершения цикла оказалось равным $\tau = 690$ с (более 10 минут!). И за это время совершается работа в 10 кДж. Поэтому средняя мощность, развиваемая машиной равна

$$N = \frac{A}{\tau} = 14,5 \text{ Вт}. \quad (13)$$

Средняя мощность, потребляемая нагревателем, находится по формуле

$$\langle N \rangle = \frac{N_1 \tau_1}{\tau} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Вт} \quad (14)$$

Таким образом, реальный КПД оказывается еще меньше $\eta = 1,4\%$.

Различие обусловлено тем обстоятельством, что при термодинамическом расчете учитывается теплота поступающая к газу и не учитываются потери этой теплоты во время разогрева!

Таким, образом, решение окончательно принятой Федей обосновано: машина работает медленно и очень неэкономно!