

-1 Подобие и размерность

Условие

Задача 10-1 Подобие и размерность.

В теории подобия для того, чтобы установить связь между “подобными” физическими явлениями, необходимо, для данного конкретного явления, найти безразмерную комбинацию определяющих его физических величин.

Пример.

На тело с массой m_1 действует сила F_1 в течение времени t_1 , что приводит к тому, что тело приобретает скорость v_1 . Комбинация $\frac{F_1 t_1}{m_1 v_1}$ является безразмерной величиной.

Таким образом, можно сделать вывод, что явление, проходящее при других значениях величин m_2, F_2, t_2, v_2 , будет проходить аналогично первому, если найденные безразмерные комбинации будут равны: $\frac{F_1 t_1}{m_1 v_1} = \frac{F_2 t_2}{m_2 v_2}$.

1. Капли двух различных жидкостей помещены на горизонтальную гладкую поверхность в поле силы тяжести. Определите, как должны быть связаны плотности, поверхностные натяжения и радиусы капель, чтобы их формы были геометрически подобными.
2. Оцените, как должны относиться радиусы и массы двух звезд, чтобы давление в их центрах были одинаковы.
3. Труба водослива расположена вертикально. Вода полностью заполняет всю трубу. Во сколько раз увеличится расход воды (кг/с), если перепад высот увеличить в 2 раза.

Решение

Задача 10-1 Подобие и размерность.

1. Физические величины, которые определяют форму капли это: плотность воды, поверхностное натяжение, радиус капли и ускорение свободного падения. Основная задача, как следует из подсказки, найти безразмерную комбинацию этих величин. Приведем единицы измерения величин к основным единицам СИ.

$$[\rho] = \text{кг/м}^3, [\sigma] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2, [R] = \text{м}, [g] = \text{м/с}^2.$$

Очевидно, из этих величин можно составить единственную безразмерную комбинацию:

$$\frac{\rho R^2 g}{\sigma}.$$

Таким образом, формы капель будут подобными, если:

$$\frac{\rho_1 R_1^2}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 R_2^2}{\sigma_2}.$$

2. В данном явлении фигурируют следующие физические величины:

$[p] = \text{Па} = \text{кг}/\text{с}^2\text{м}$ - давление внутри звезды;

$[M] = \text{кг}$ - масса звезды;

$[R] = \text{м}$ - радиус;

$[G] = \text{Нм}^2/\text{кг}^2 = \text{м}^3/\text{с}^2\text{кг}$ - гравитационная постоянная, определяющая силу взаимодействия.

Найти безразмерную комбинацию в этом случае не очень просто. Поэтому предположим, что безразмерная комбинация имеет вид: $p^a M^b R^c G^d$. И попытаемся определить такие значения a, b, c, d , при которых это произведение будет безразмерной величиной. Подставляя единицы измерения, получим комбинацию:

$$\frac{\text{кг}^a}{\text{с}^{2a}\text{м}^a} \text{кг}^b \text{м}^c \frac{\text{м}^{3d}}{\text{с}^{2d}\text{кг}^d}. \quad (1)$$

Рассматривая каждую единицу измерения по отдельности, получим:

$$\begin{cases} a + b - d = 0 \\ -a + c + 3d = 0 \\ -2a - 2d = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система, безусловно, имеет бесчисленное множество решений. Однако нам необходимо найти хотя бы одно. Для этого предположим, например, что $a = 1$. Тогда:

$$d = -1, \quad b = -2, \quad c = 4. \quad (3)$$

Т.е. искомая безразмерная комбинация имеет вид:

$$\frac{pR^4}{GM^2}.$$

Таким образом, между массами и радиусами звезд с одинаковым давлением внутри, должно выполняться соотношение:

$$\frac{R_1^2}{M_1} = \frac{R_2^2}{M_2} \quad (4)$$

При решении этой задачи мы пренебрегли действием светового излучения, давление которого может быть достаточно существенно.

3. Физические величины, определяющие явление:

$[\rho] = \text{кг}/\text{м}^3$ - плотность воды;

$[h] = \text{м}$ - высота водослива;

$[q] = \kappa z/c$ - расход;

$[g] = m/c^2$.

Проводя рассуждения аналогичные второй задаче, найдем безразмерную комбинацию: $\frac{q}{\rho g^{1/2} h^{5/2}}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что расход пропорционален высоте в степени $5/2$. И при увеличении перепада высот в 2 раза, расход увеличится в $\approx 5,7$ раз.