

Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!

Условие

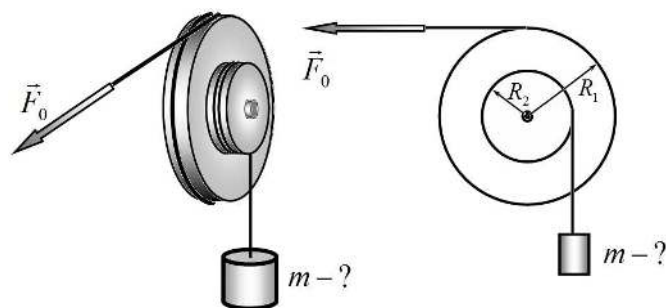


Задача 9.1. Простая задача про простые механизмы.

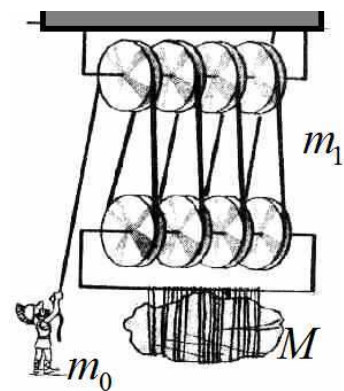
Когда великий Архимед открыл правило рычага, он воскликнул: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!». И не случайно – еще в античные времена это правило трансформировалось в «золотое правило механики»: «ни один механизм не дает выигрыша в работе, во сколько раз выигрываешь в силе, во столько раз проигрываешь в работе!». А через 2 тысячи лет из этого правила вырос закон сохранения энергии, основа современной физики. Вам предстоит доказать, что Вы тоже понимаете «золотое правило механики» и его применение к различным механизмам. В каждой части не только приведите

ответ, но и обоснуйте его. Во всех устройствах трением пренебрегайте.

1.1 Ворота.



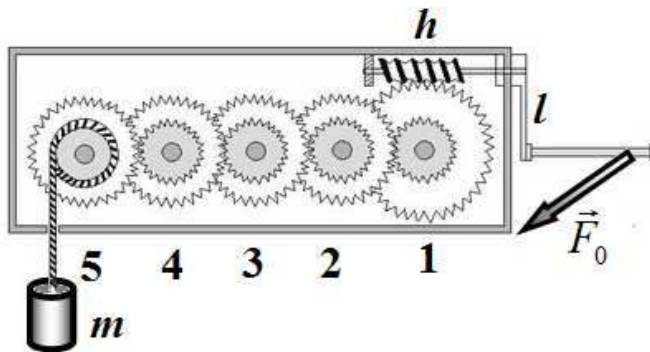
Подъемное устройство (ворота) состоит из двух соединенных толстых дисков, насаженных на одну горизонтальную ось. Радиусы дисков равны R_1 , R_2 . На боковые поверхности дисков намотаны крепкие веревки. Одну из них тянут горизонтально с постоянной силой $\vec{F}_0$. Определите массу груза m , который можно поднять с помощью этого устройства.



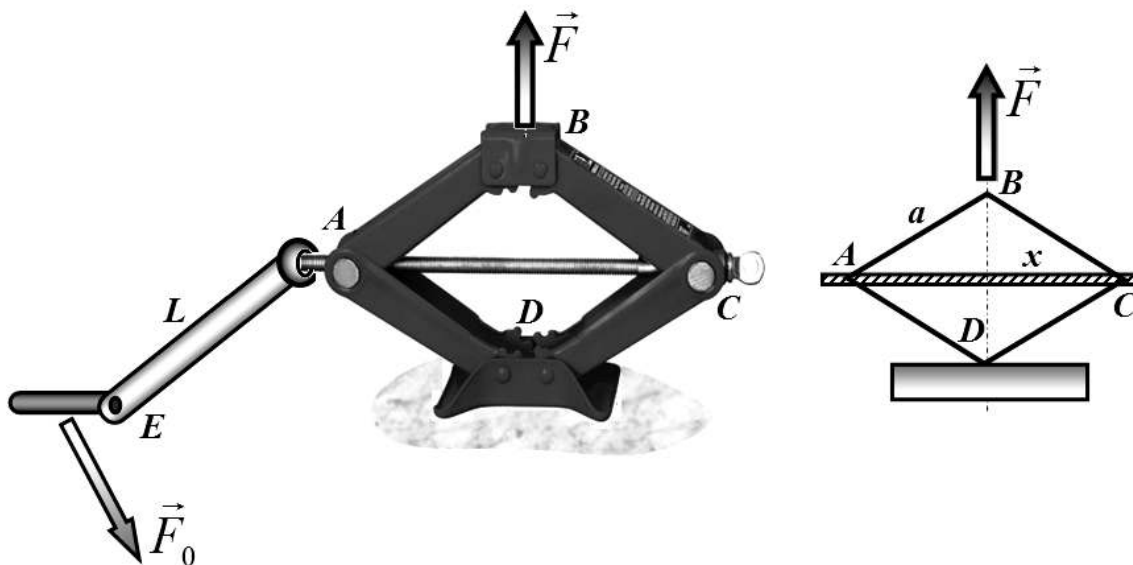
1.2 Полиспаст.

На рисунке показано еще одно подъемное устройство – полиспаст. Определите массу груза M , который может поднять человек массы m_0 с помощью этого устройства. Масса всех одинаковых блоков полиспаста равна m_1 , массой остальных его частей можно пренебречь.

На рисунке показана схема еще одного подъемного устройства – лебедки. Сдвоенные шестерни 1-4 имеют n_1 зубьев на большей шестеренке и n_2 зубьев на меньшей шестеренке (причем $n_1 = 2n_2$). На последней 5 ступени меньшая шестеренка заменена на диск радиуса r , на который намотана веревка, к которой привязывают поднимаемый груз m . Первую шестерню приводят во вращения с помощью червячного механизма. Ось червяка вращают с помощью ручки, длина плеча которой равна l . Силу F_0 прикладывают к рукоятке перпендикулярно плечу. Определите массу груза, которую можно поднять с помощью этой лебедки.



1.4 Домкрат.



На рисунке показан домкрат и его схема. Основу домкрата составляет подвижная рама $ABCD$, имеющая форму ромба со стороной $a = 25$ см. Эти стороны соединены шарнирно. Между точками A и C находится стержень с резьбой с шагом $h = 2,0$ мм. При вращении стержня узел A (внутри которого имеется гайка с соответствующей резьбой) приближается к узлу C , при этом узел B поднимается и поднимает необходимый груз. Стержень с резьбой вращают с помощью рукоятки AE , длина которой $L = 30$ см. Силу $F_0 = 50$ Н прикладывают к ручке рукоятки перпендикулярно к плечу AE . Рассчитайте подъемную силу домкрата (т.е. силу F) в тот момент, когда расстояние AC (обозначим его x) в два раза больше расстояния BD .

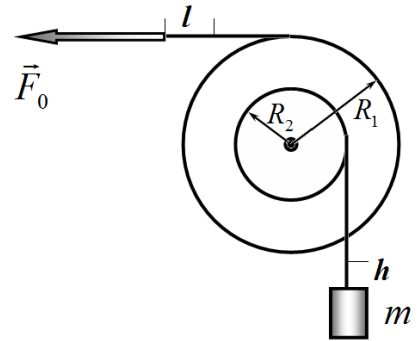
Постройте примерный график зависимости подъемной силы домкрата от длины x (которая изменяется в ходе подъема).

Подсказка. Рассмотрите малое изменение величины x .

Решение

Задача 9.1. Простая задача про простые механизмы.

1.1 Ворот.



Если конец веревки, к которой приложена сила, сместить на расстояние l , то груз поднимется на высоту h , которую можно найти из условия равенства углов поворота:

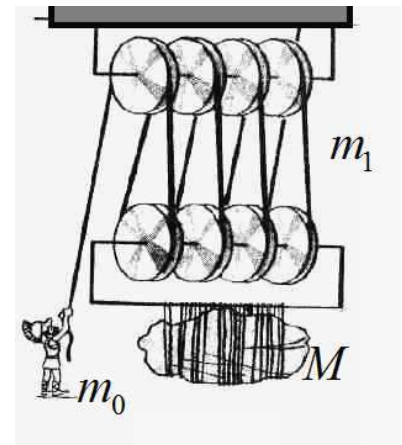
$$\frac{l}{R_1} = \frac{h}{R_2}. \quad (1)$$

В соответствии с «золотым правилом» выполняется условие

$$F_0 l = mgh. \quad (2)$$

Из этих выражений, следует, что масса поднимаемого груза равна

$$m = \frac{F_0 R_1}{g R_2}. \quad (3)$$



1.2 Полиспаст.

Из условия постоянства длины веревки следует, что если человек опустит конец веревки на величину l , то груз поднимется на высоту $h = \frac{l}{8}$. Так как максимальная сила, которую может приложить человек равна $m_0 g$, то максимальный груз, который можно поднять, находится из «золотого правила механики»:

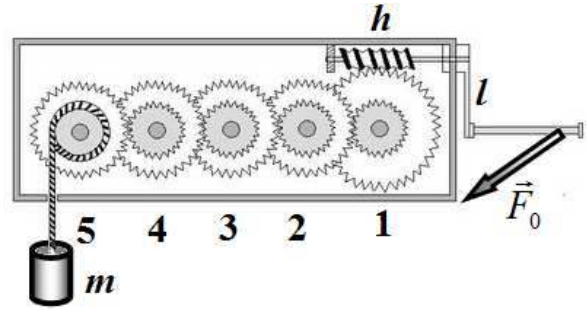
$$m_0 g l = \left(M + \frac{m_1}{2} \right) g h. \quad (1)$$

Откуда следует, что

$$M = 8m_0 - \frac{m_1}{2}. \quad (2)$$

1.3 Лебедка.

Допустим, рукоятку повернули на один оборот (при этом ее конец прошел расстояние равное $L = 2\pi l$), первая шестерня повернулась на угол $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}$. Вторая шестерня при этом повернется на угол в 2 раза меньший (так как на меньшей шестеренке в два раза меньше зубьев), угол поворота каждой следующей также будет в два раза меньше предыдущей. Следовательно, пятая шестерня повернется на угол $\varphi_5 = \frac{\varphi_1}{16}$, при этом груз поднимется на высоту



$$h = r\varphi_5 = r \frac{1}{16} \frac{2\pi}{n_1}. \quad (1)$$

Из «золотого правила механики» следует равенство

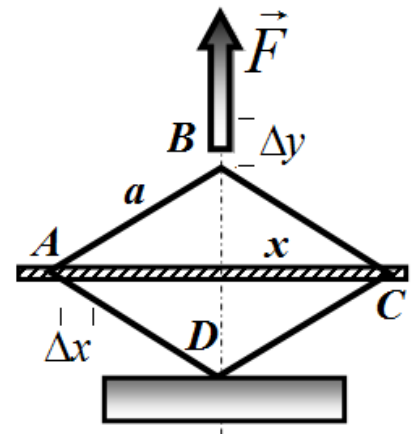
$$F_0 L = m g h \quad \Rightarrow \quad m = F_0 \frac{L}{h} = F_0 \frac{2\pi l}{r \frac{1}{16} \frac{2\pi}{n_1}} = 16n_1 \frac{l}{r} F_0. \quad (2)$$

1.4 Домкрат.

Нам необходимо связать путь, пройденный рукояткой, с высотой подъема груза. Пусть узел A сместился на малое расстояние Δx , а груз поднялся на высоту Δy . Из теоремы Пифагора для длины стороны ромба можно записать два выражения (до смещения и после смещения)

$$\left(\frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2 = a^2$$

$$\left(\frac{x - \Delta x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y + \Delta y}{2} \right)^2 = a^2. \quad (1)$$



Здесь y высота BD до начала смещения. Раскроем скобки во втором уравнении

$$\frac{x^2 - 2x\Delta x + (\Delta x)^2}{4} + \frac{y^2 - 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{4} = a^2. \quad (2)$$

Так как мы считаем смещения малыми, то в этой формуле можно пренебречь еще более малыми квадратами смещений. Если теперь из уравнения (2) вычесть первое уравнение системы (1), то получим

$$-2x\Delta x + 2y\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{y}{x}\Delta x. \quad (3)$$

Если рукоятка сделает один оборот (ее конец пройдет путь $S = 2\pi L$), то узел A сместится на величину шага винта $\Delta x = h$, при этом груз поднимется на величину $\Delta y = \frac{y}{x}h$. В очередной раз записываем уравнение, следующее из «золотого правила механики»

$$2\pi L F_0 = F \frac{y}{x} h \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0. \quad (4)$$

Подставляя численные значения, получим окончательный результат

$$F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 = \frac{2\pi \cdot 30 \text{ см}}{0,2 \text{ см}} \cdot 2 \cdot 50 \text{ Н} = 9,4 \cdot 10^4 \text{ Н}. \quad (5)$$

Итак, грузоподъемность – более 9 Тонн, а приложенная сила всего-то 5 Килограмм! Для построения графика в формуле (4) необходимо выразить подставить y как функцию x . Эту зависимость, можно выразить из первого уравнения системы (1):

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2}. \quad (6)$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 = \frac{2\pi L}{h} F_0 \frac{x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{2\pi L}{h} F_0 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = 4,7 \cdot 10^4 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}. \quad (7)$$

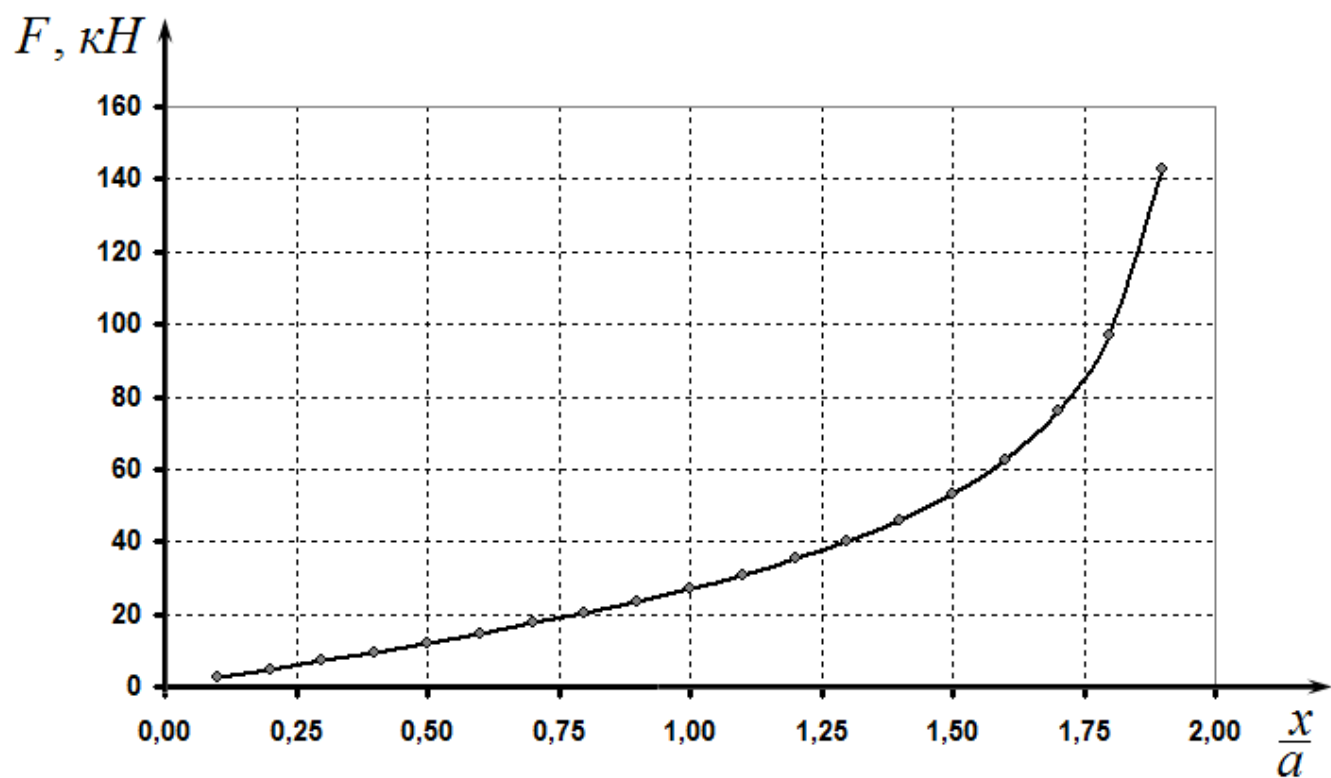


График этой функции можно построить по точкам. При $x \rightarrow 2a$, то есть в начале подъема грузоподъемность наибольшая, по мере подъема грузоподъемность падает.