

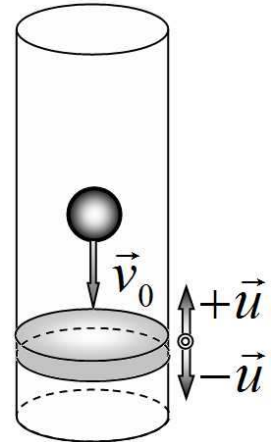
Условие

Задача 2. Резонанс

Внизу очень высокого цилиндра колеблется тяжелая платформа. Платформа движется вверх и вниз с постоянной по модулю скоростью $\pm u$ и с некоторым периодом T . Время торможения и разгона платформы пренебрежимо малы, т. е. можно считать, что, достигая нижнего или верхнего положения, платформа мгновенно изменяет скорость на противоположную.

На платформу с некоторой высоты h падает маленький шарик. Непосредственно перед столкновением с платформой шарик движется вниз с некоторой скоростью v , а сам поршень находится в крайнем нижнем положении и движется вверх (см. рис.).

Возможна ситуация, при которой шарик в процессе движения всегда ударяется о платформу, находящуюся в одном и том же (описанном выше) положении, и при этом всегда приобретает дополнительную скорость.



1. Покажите, что при заданной скорости u такая ситуация возможна, только если период колебаний платформы и скорость, с которой шарик подлетает к платформе, удовлетворяют следующим условиям:

$$T = A/m \text{ и } v = B \frac{n}{m}, \text{ где } n, m \in N.$$

Пусть $u = 0,5 \text{ м/с}$, а $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. Найдите численные значения A и B .

В задаче рассматривается только случай, когда скорость шарика гораздо больше скорости платформы $v \gg u$ ($v \geq 10u$) и высота, на которую поднимается шарик, намного больше амплитуды колебаний платформы. Последнее условие сформулируем следующим образом: $uT \ll h$ ($uT \leq h/10$).

3. Как должны быть связаны числа n и m , чтобы эти условия выполнялись?

4. Определите значение наименьшей «резонансной» скорости v_0 , которой может обладать подлетающий к платформе шарик, а также интервал Δv между двумя резонансными скоростями для $m = 1$, $m = 2$ и $m = 10$.

Рассмотрим более подробно поведение шарика, подлетающего к платформе с резонансной скоростью v_0 при $m = 1$.

5. Определите моменты времени i -го касания шарика и платформы, а также максимальную высоту подъема шарика после i -го касания.

6. Изобразите схематически зависимость координаты шарика от времени (обозначьте характерные точки: моменты удара, максимальные высоты).

Пусть скорость v шарика отличается от резонансной на величину δv ($v = v_0 + \delta v$). Рассмотрите только случай, когда $v_0 < v < v_0 + \frac{\Delta v}{2}$.

7. Через какое количество ударов процесс увеличения высоты подъема сменится уменьшением? Выразите это время через отношение $\delta v / \Delta v$.

8. Какое время будет продолжаться разгон и на какую максимальную высоту h ($\frac{\delta v}{\Delta v}$) сможет подняться этот шарик?

9. Нарисуйте качественный график зависимости h ($\frac{\delta v}{\Delta v}$).

10. Полученное в п. 8 значение высоты является несколько заниженным, т.к. сама платформа находится в различных положениях при каждом следующем ударе. Оцените ошибку Δh ($\frac{\delta v}{\Delta v}$) определения максимальной высоты подъема.

Задача 1. «Railgun»



Программа СОИ США сосредоточила публичное внимание на электромагнитных пушках... М. Леффлер

Электромагнитные пушки давно заполонили компьютерные игры, боевики ... и даже являются объектами серьезных научных и инженерных исследований. Нам не кажется, что за отведенное Вам время, Вы сможете предложить принципиально новые принципы создания такого оружия.

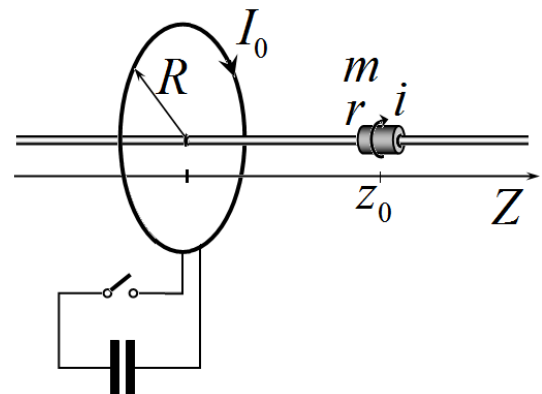
Но, Вы обязаны продемонстрировать свои знания и способности в объяснении и описании основных принципов устройства такого оружия.

Основная идея разгона снарядов заключается во взаимодействии снаряда с магнитным полем, создаваемым системой катушек, по которым пропускаются сильные импульсы электрического тока.

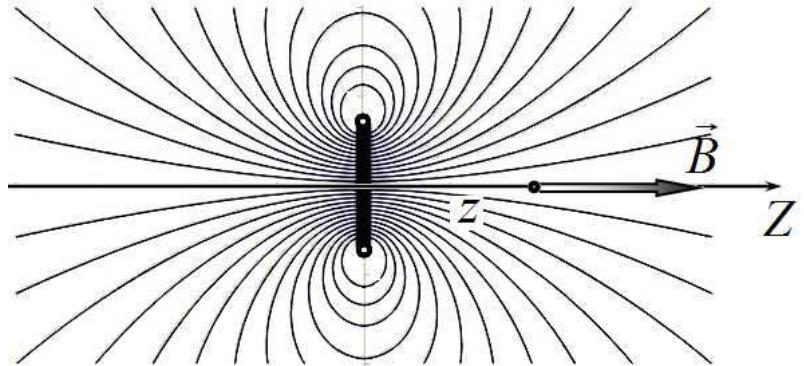
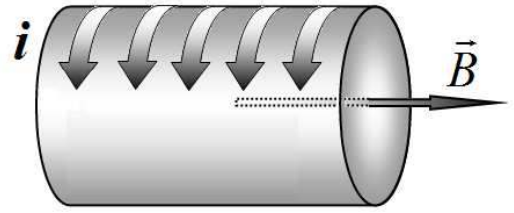
Вам предстоит рассмотреть простейший вариант – система катушек заменяется на одну, которая, в свою очередь, рассматривается как круговой виток радиуса R с током, силу которого будем обозначать I_0 . Для производства выстрела кольцо подключают к батарее конденсаторов суммарной емкостью C , заряженной до напряжения U_0 . Электрическое сопротивление кольца обозначим Y (чтобы не путать с его радиусом), индуктивностью кольца можно пренебречь.

Излучением электромагнитных волн во всех случаях следует пренебрегать.

Вдоль оси витка расположен тонкий, длинный, гладкий, непроводящий и немагнитный стержень. Со стержнем совместим ось координат Oz , начало которой находится в центре кольца.



Вдоль стержня может скользить без трения цилиндрический снаряд массы m . Размеры снаряда – его радиус r и длина l , значительно меньше радиуса витка R . Во всех случаях, электромагнитные свойства снаряда моделируются проводящим круговым витком, в котором протекает, или может протекать электрический ток, силу которого будем обозначать i . Магнитные свойства снаряда будут варьироваться по ходу задачи.

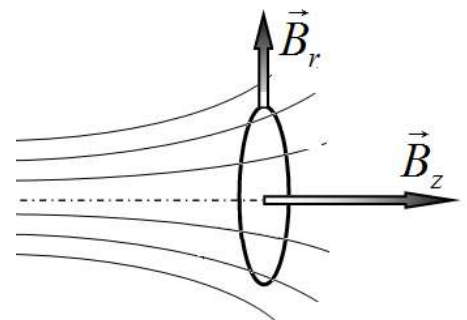


Магнитное поле, создаваемое круговым током I_0 описывается достаточно сложно. Однако, на оси кольца вектор индукции магнитного поля направлен вдоль этой оси, а его модуль на расстоянии z от центра кольца определяется по формуле

$$B_z = \frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Часть 0. (Тоже оценивается!)

0.1 Покажите, что в осесимметричном магнитном поле при изменении осевой компоненты индукции поля $B_z(z)$ неизбежно существование радиальной компоненты поля, которая на малом расстоянии r от оси может быть рассчитана по формуле



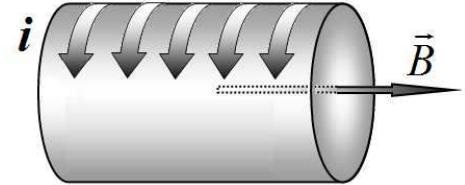
$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}, \quad (2)$$

где $\frac{dB_z}{dz}$ - производная от осевой компоненты по координате.

0.2 Найдите зависимость радиальной компоненты поля кругового тока в зависимости от координаты z и расстояния до оси $B_r(z, r)$.

Часть 1. Снаряд – постоянный магнит.

Снаряд пушки представляет собой постоянный магнит (в состоянии полной намагниченности). Это значит, что его магнитные свойства моделируются постоянным круговым током силой i , протекающим по его боковой поверхности. Сила этого тока не зависит от индукции внешнего магнитного поля.



1.1 Пусть снаряд покоится и находится на расстоянии z_0 от центра кольца, по которому протекает постоянный ток силой I_0 . Найдите силу, действующую на снаряд со стороны магнитного поля. Постройте график зависимости этой силы от расстояния до центра кольца.

1.2 Какую максимальную скорость может приобрести снаряд при выстреле в описанных выше условиях при разрядке конденсатора?

Считайте, что смещением снаряда за время прохождения тока по кольцу можно пренебречь.

1.3 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Часть 2. Снаряд – магнетик.

Рассмотрим теперь поведение снаряда из магнитомягкого железа. В этом случае в магнитном поле снаряд намагничивается, причем можно считать, что его намагниченность пропорциональна индукции внешнего поля (то есть можно пренебречь эффектами насыщения и остаточной намагниченности). Иными словами, магнитные свойства снаряда моделируются круговым током, текущим по боковой поверхности, сила которого пропорциональна индукции внешнего поля B_0 , направленного по оси снаряда

$$i = \chi B_0. \quad (3)$$

Считайте, что χ - известная константа.

2.1 Пусть снаряд покоится и находится на расстоянии z_0 от центра кольца, по которому протекает постоянный ток силой I_0 . Найдите силу, действующую на снаряд со стороны магнитного поля.

2.2 Рассчитайте, какую максимальную скорость может приобрести снаряд в этом случае.

2.3 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Часть 3. Снаряд – катушка индуктивности.

Рассмотрим теперь снаряд, изготовленный из немагнитного материала, на внешнюю поверхность которого намотана закороченная на себя катушка, индуктивность которой равна L . Электрическим сопротивлением катушки можно пренебречь.

3.1 Рассчитайте, какую максимальную скорость может приобрести снаряд в этом случае.

3.2 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?