

Условие

Задание 2. Формула Эйлера.

Математическое вступление.

Почему-то все боятся такой замечательно экспоненциальной функции

$$y = e^x, \quad (1)$$

которая также обозначается $y = \exp(x)$.

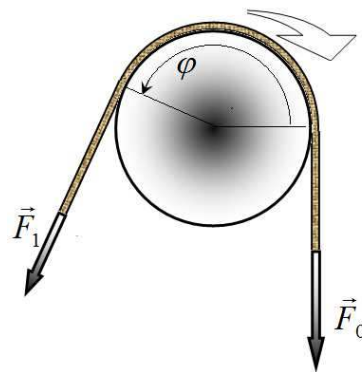
*Знакома же вам функция 2^x , экспонента принципиально от нее не отличается, только вместо двойки стоит константа $e = 2,71828...$ Но какая Вам разница – все

равно будете считать на калькуляторе. Обратную к экспоненте является логарифмическая функция (которую тоже можно подсчитать на калькуляторе), если верно соотношение (1), то верно и обратное:

$$x = \ln y \quad (2)$$

Физическое вступление.

Если нить, или веревка, переброшена через цилиндрическую поверхность, то силы трения и силы натяжения (а с ними и силы нормальной реакции), действующие на отдельные участки нити оказываются взаимосвязанными. В этом случае трение уменьшает силу натяжения не на какую-то величину, в какое-то число раз. Если нить скользит по поверхности, то соотношение между силами натяжения нити с двух сторон определяется формулой Л. Эйлера



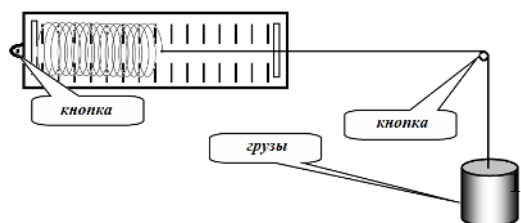
$$F_1 = F_0 \exp(-\mu\varphi), \quad (3)$$

где μ - коэффициент трения нити о поверхность, φ - угол закрутки (в радианах). Обратите внимание, в эту формулу радиус цилиндрической поверхности не входит.

В работе Вам необходимо проверить выполнение этой формулы и рассчитать коэффициент трения нити о стальную иглку.

Приборы и оборудование: динамометр, 3 кнопки декоративные, нить, набор грузов 6х100 г, скотч.

Закрепите динамометр с помощью кнопки и скотча на торце стола. Воткните в торец стола еще одну кнопку, но так, чтобы часть металлической иглы оставалась открытой (для переброски нити). Прикрепи-



10 класс. Экспериментальный тур.

те нить к динамометру, перебросьте ее через иголку кнопки, на второй конец нити подвешивайте грузы. В этом случае угол закрутки равен $\varphi = 90^\circ$.

Часть 1. Зависимость от массы.

1. Измерьте зависимость показаний динамометра от числа подвешенных грузов. *Будьте аккуратны – из-за трения нити об иголку существует зона застоя. Поэтому измерения проводите следующим образом: сначала держите грузы в руках, затем медленно, придерживая их, отпускайте, чтобы они двигались вниз до остановки.* 2. Проведите аналогичные измерения для угла закрутки $\varphi = 270^\circ$ (как сделать такой угол – догадайтесь самостоятельно). 3. Постройте графики полученных зависимостей. Определите, можно ли считать, что сила трения уменьшает силу натяжения в одно и тоже число раз. 4. Используя формулу Эйлера, рассчитайте коэффициенты трения нити об иголку для двух проведенных серий измерений.

Часть 2. Зависимость от угла.

На нить подвесьте два груза. Динамометр держите в руках. Меняя направление конца нити прикрепленной к динамометру можно изменять угол закрутки (допустимо с шагом $\varphi = 45^\circ$). И в этом случае помните о зоне застоя!

2.1 Измерьте зависимость показаний динамометра от угла закрутки. 2.2 Проведите аналогичные измерения для трех грузов. 2.3 Проверьте выполнимость формулы Л. Эйлера в обоих случаях. 2.4 Определите по этим данным значения коэффициента трения.

Часть 3.

3.1 Рассчитайте среднее значение коэффициента трения нити об иголку по всем своим измерениям.

Решение

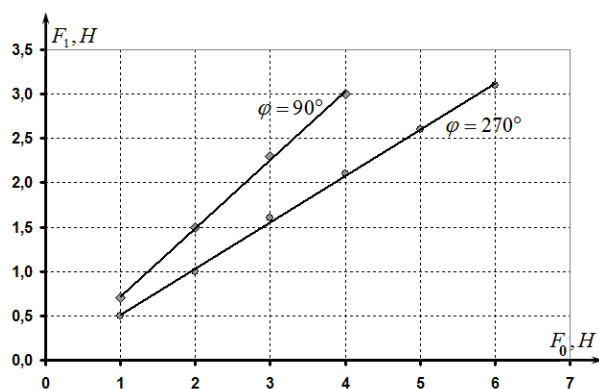
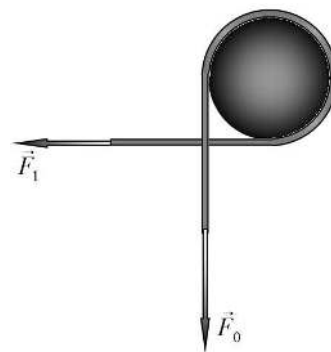
Задание 10.2. Формула Эйлера.

Часть 1. Зависимость от массы.

В таблице 1 приведены результаты измерений зависимостей показаний динамометра F_1 от числа подвешенных грузов (или от их силы тяжести F_0) при двух значениях угла закрутки $\varphi_1 = 90^\circ$ и $\varphi_2 = 270^\circ$. Для измерений при угле $\varphi_2 = 270^\circ$ достаточно намотать нить на кнопку, как показано на рисунке.

Таблица 1.

Число грузов F_0 , Н	Показания динамометра F_1 , Н	
	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 270^\circ$
1	0,7	0,5
2	1,5	1
3	2,3	1,6
4	3	2,1
5		2,6
6		3,1



На следующем рисунке приведены графики полученных зависимостей. Как следует из графиков (прямые линии, примерно проходящие через нуль, т.е. прямо пропорциональные зависимости), действительно, сила трения уменьшает натяжение в одно и тоже число раз, то есть

$$F_1 = kF_0 \quad (1)$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$k = \exp(-\mu\varphi). \quad (2)$$

Параметры линейных зависимостей ($y = ax + b$) для двух прямых, рассчитанные по МНК, равны:

для $\varphi_1 = 90^\circ$

$$\begin{aligned} a &= 0,77 \pm 0,04 \\ b &= -0,05 \pm 0,09 \end{aligned} \quad (3)$$

для $\varphi_2 = 270^\circ$

$$\begin{aligned} a &= 0,52 \pm 0,03 \\ b &= -0,01 \pm 0,06 \end{aligned} \quad (4)$$

Расчет сдвига (параметр b) показывает, что его можно считать равным нулю, то есть зависимости являются прямо пропорциональными. Коэффициенты наклона позволяют рассчитать значения коэффициентов трения по формулам

$$\mu = -\frac{\ln a}{\varphi}, \quad \Delta\mu = \frac{1}{\varphi} \frac{\Delta a}{a}. \quad (5)$$

Расчет по этим формулам дает следующие значения коэффициентов трения для $\varphi_1 = 90^\circ$

$$\mu = 0,17 \pm 0,03 \quad (6)$$

для $\varphi_2 = 270^\circ$

$$\mu = 0,14 \pm 0,02 \quad (7)$$

В пределах погрешности данные значения коэффициента трения примерно равны.

Часть 2. Зависимость от угла.

Таблица 2. Для трех грузов.

φ°	φ , рад	F , Н	$\ln F$
90	1,57	2,2	0,788
135	2,36	2,0	0,693
180	3,14	1,9	0,642
225	3,93	1,8	0,560
270	4,71	1,5	0,405
315	5,50	1,3	0,262
45	0,79	2,5	0,916

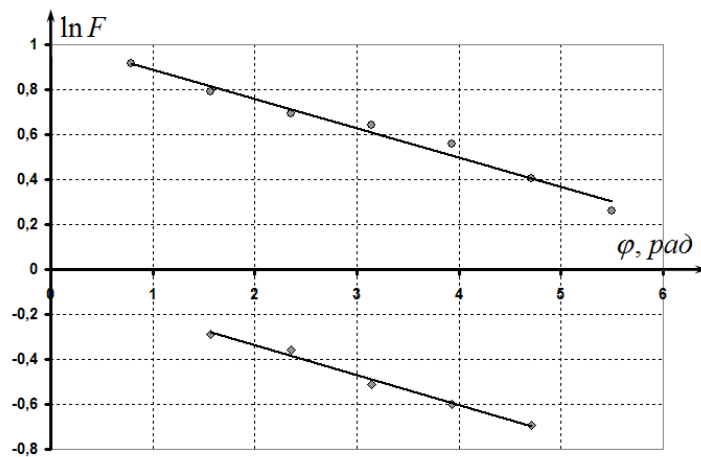


Таблица 3. Для двух грузов.

φ°	φ , рад	F , Н	$\ln F$
90	1,57	1,5	-0,288
135	2,36	1,4	-0,357
180	3,14	1,2	-0,511
225	3,93	1,1	-0,598
270	4,71	1,0	-0,693

В таблицах 2,3 приведены результаты измерений зависимости показаний динамометров F от угла закрутки φ . Для доказательства применимости формулы Эйлера эти зависимости следует построить зависимость логарифма силы от угла закрутки (в радианах):

$$\ln F = \ln F_0 - \mu\varphi \quad (8)$$

Результаты расчетов также представлены в таблицах, рядом приведены графики полученных зависимостей. Эти зависимости близки к линейным, что свидетельствует о применимости формулы Эйлера. Кроме того, коэффициенты наклона этих графиков одинаковы, что говорит о том, что значения коэффициентов трения примерно равны.

Расчет коэффициентов наклона приведенных прямых (по МНК) показывает, что значение коэффициента трения в обоих случаях равно

$$\mu = 0,13 \pm 0,02 \quad (9)$$

Часть 3.

В качестве конечного значения коэффициента трения можно взять значение (9), полученное с большей точностью и по наибольшему числу экспериментальных данных..