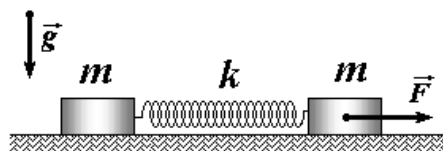


3. Пружинки. 1.1

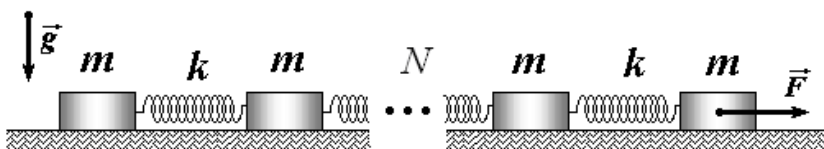
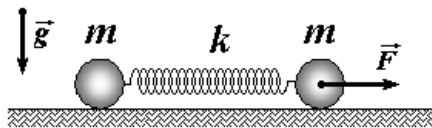
Условие

Задача 9.3. Пружинки.

1.1 Два одинаковых бруска массой m каждый, соединенные легкой пружиной с коэффициентом упругости k , движутся по горизонтальной плоскости под действием постоянной горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной к одному из них. Найдите установившееся абсолютное удлинение пружины Δx в зависимости от модуля F приложенной силы. Коэффициент трения брусков о плоскость — μ . Силой сопротивления воздуха пренебречь.

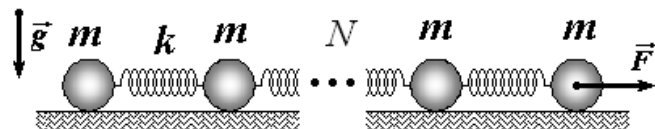


1.2 Два одинаковых шара, соединенные легкой пружиной жесткости k , движутся в вязкой среде под действием постоянной горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной к одному из них. Известно, что при движении такого шара в вязкой среде со скоростью $\vec{v}$ на него действует сила сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta \cdot \vec{v}$, где β — некоторый постоянный для данной среды коэффициент. Найдите установившееся абсолютное удлинение пружины Δx в зависимости от модуля F приложенной силы. Силами сухого трения пренебречь.



1.3 N одинаковых брусков массой m каждый, соединенные легкими пружинами с коэффициентом упругости k каждая, движутся по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ под действием постоянной горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной к одному из брусков. Найдите суммарное установившееся удлинение всех пружин $\Delta x_{\text{общ}}$ в зависимости от модуля приложенной силы F . Силой сопротивления воздуха пренебречь.

1.4 N одинаковых шаров, соединенных легкими пружинами жесткости k , движутся в вязкой среде. Известно, что при движении такого шара в вязкой среде со скоростью $\vec{v}$ на него действует сила сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\beta \cdot \vec{v}$, где β — некоторый постоянный для данной среды коэффициент. Найдите зависимость суммарного установившегося удлинения пружин $\Delta x_{\text{общ}}$ от модуля приложенной силы F . Силами сухого трения пренебречь.



Решение

Задача 9.3. Пружинки.

1.1 Ускорение a системы, образованной двумя брусками, найдем из второго закона Ньютона

$$2ma = F - 2F_{\text{тр}} = F - 2\mu mg, \quad (1)$$

где $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2}$ сила трения, действующая на каждый из брусков.

Поскольку силы упругости пружины в данном случае являются внутренними (действуют на оба бруска), то в уравнение (1) они не вошли (на рисунке не отмечены).

Из (1) получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{2m}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что при записи (1) и (2) предполагается (и следует из условия задачи), что выполняется условие $F > 2\mu mg$.

Теперь применим второй закон Ньютона к движению левого бруска 2, который ускоряется под действием силы упругости пружины $\vec{F}_y$ и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$

$$ma = F_y - F_{\text{тр}2} = F_y - \mu mg. \quad (3)$$

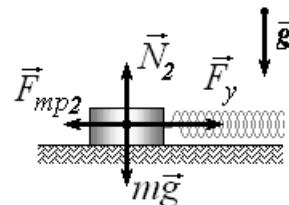
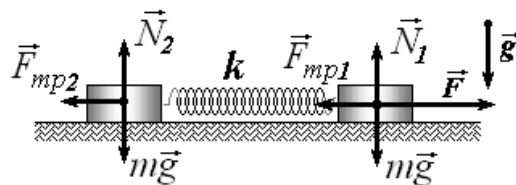
Выражая из (3) значение силы упругости F_y пружины, найдем

$$ma = m \frac{F - 2\mu mg}{2m} = F_y - \mu mg. \quad (4)$$

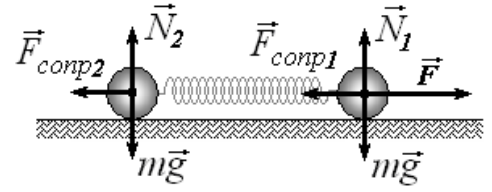
Из (4) следует, что $F_y = \frac{F}{2}$, следовательно, согласно закону Гука

$$F_y = \frac{F}{2} = k\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{2k}. \quad (5)$$

Как следует из (5), абсолютное удлинение пружины Δx в данном случае прямо пропорционально модулю F силы, приложенной к одному из брусков. Интересно, что коэффициент трения μ брусков о плоскость не вошел в окончательный ответ.



1.2 Под действием внешней силы шары начнут ускоряться по горизонтальной плоскости (сухим трением, согласно условию, можно пренебречь). По мере роста скорости шаров будут увеличиваться модули сил сопротивления $\vec{F}_{\text{сопр}}$, действующих на них в системе, причем, поскольку скорости шаров одинаковы, то $F_{\text{сопр}1} = F_{\text{сопр}2}$. Следовательно, при некоторой скорости $v_1 = \text{const}$ сумма сил сопротивления сравняется по модулю с силой $\vec{F}$, после чего разгон системы прекратится (движение установится, т.е. ее ускорение станет равным нулю $a = 0$).



Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения системы шаров

$$2ma = 0 = F - 2F_{\text{сопр}} = F - 2\beta v_1. \quad (6)$$

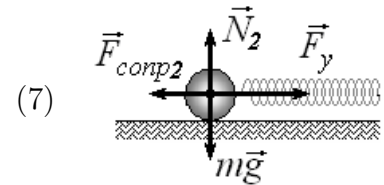
Поскольку силы упругости пружины в данном случае являются внутренними (действуют на оба шара), то в уравнение (6) они не вошли.

Из (6) следует, что

$$F_{\text{сопр}} = \frac{F}{2}.$$

Аналогично применяя второй закон Ньютона к установившемуся движению шара 2, получим

$$ma = 0 = F_y - F_{\text{сопр}2}.$$



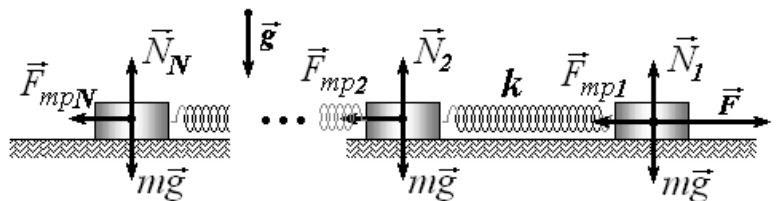
Из (7) найдем модуль силы упругости

$$F_y = F_{\text{сопр}2} = \frac{F}{2}. \quad (8)$$

Применяя закон Гука, находим абсолютное удлинение пружины Δx в зависимости от модуля F приложенной силы

$$F_y = \frac{F}{2} = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{F}{2k}.$$

Как следует из (9), абсолютное удлинение пружины Δx в данном случае также прямо пропорционально модулю F силы, приложенной к одному из шаров. Опять же интересно, что коэффициент сопротивления β также не вошел в окончательный ответ.



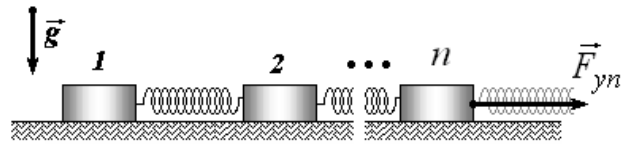
1.3 В случае произвольного количества N брусков действуем аналогично пункту 1.1 задачи. Рассмотрим все бруски как целое (систему), имеющую массу $M = N \cdot m$. Силы упругости пружин в данном случае опять являются внутренними (действуют попарно) и их можно не учитывать при записи второго закона Ньютона

$$Nma = F - NF_{\text{тр}} = F - N\mu mg.$$

Из (10) найдем ускорение системы как целого

$$a = \frac{F - N\mu mg}{Nm}.$$

Далее рассмотрим n -ый брусок от конца цепочки. Сила упругости n -ой пружины F_{yn} , действующая на него слева, разгоняет n брусков, следовательно, второй закон Ньютона для системы рассматриваемых брусков примет вид



$$nma = F_{yn} - nF_{\text{тр}} = F_y - n\mu mg$$

Из (12) найдем модуль F_{yn} силы упругости n -ой пружины

$$F_{yn} = \frac{n}{N}F.$$

Согласно (13) натяжение пружин цепочки возрастает пропорционально номеру n пружины от конца цепочки. Следовательно, минимальное натяжение будет у пружины с номером $n = 1$ (в конце цепочки), а максимальное — с номером $n = N - 1$, у пружины в начале цепочки, прикрепленной к грузу, на который действует сила $\vec{F}$.

Аналогично будет вести себя и абсолютная деформация n -ой пружины

$$\Delta x_n = \frac{F_{yn}}{k} = \frac{n}{N} \frac{F}{k}.$$

Как следует из (14) для нахождения суммарного удлинения всех пружин $\Delta x_{\text{общ}}$ необходимо найти сумму членов арифметической прогрессии

$$\Delta x_{\text{общ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x_n.$$

При записи (15) учтено, что между N брусками расположено $N - 1$ пружина. Суммирование дает

$$\Delta x_{\text{общ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{N-1} = \frac{1}{N} \frac{F}{k} + \frac{2}{N} \frac{F}{k} + \dots + \frac{N-1}{N} \frac{F}{k} = \frac{F}{Nk} (1+2+\dots+(N-1)) = \frac{F}{k} \frac{(N-1)}{2}$$

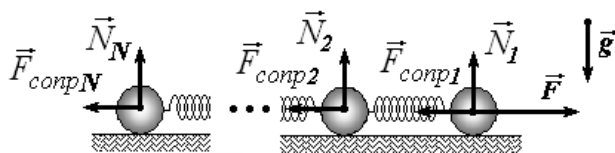
Окончательный ответ

$$\Delta x_{\text{общ}} = \frac{F(N-1)}{k \cdot 2}. \quad (17)$$

1.4 Поведение системы из N шаров, движущихся в вязкой среде, будет аналогично поведению двух шаров, рассмотренных в пункте 1.2 задачи — с течением времени скорости шаров перестанут меняться, т.е. примут некоторое установившееся значение v_2 . (ускорение системы станет равным нулю $a = 0$).

Деформации пружин при этом также будут оставаться неизменными.

Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения системы (ускорение равно нулю)



$$F - NF_{\text{сomp}} = 0 \Rightarrow F_{\text{сomp}} = \frac{F}{N} \quad (18)$$

Опять же рассмотрим n -ый шарик от конца цепочки. Сила упругости n -ой пружины F_{yn} , действующая на него слева, движет n брусков, следовательно, второй закон Ньютона для рассматриваемых шариков примет вид

$$ma = 0 = F_{yn} - nF_{\text{сomp}} \Rightarrow F_{yn} = \frac{n}{N}F \quad (19)$$

Как видим результат (19) полностью аналогичен выражению (13) для предыдущего пункта задачи. Следовательно, суммарное удлинение пружин $\Delta x_{\text{общ}}$ в данном случае также можно просчитать как сумму соответствующей арифметической прогрессии $x + \Delta x + \dots + \Delta x = 1 + 2 + \dots + (N-1)$.
(20) общ

$$\Delta x_{\text{общ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_{N-1} = \frac{F}{Nk}(1 + 2 + \dots + (N-1)) = \frac{F(N-1)}{k \cdot 2}. \quad (20)$$

Окончательный ответ

$$\Delta x_{\text{общ}} = \frac{F(N-1)}{k \cdot 2}. \quad (21)$$

При большом числе шаров ($N \rightarrow \infty$) единиц в числителе (21) можно пренебречь. В таком случае выражение для суммарного удлинения принимает вид

$$\Delta x_{\text{общ}} \approx \frac{F}{k} \frac{N}{2}$$

Интересно, что при рассмотрении различных механизмов трения (сухого и вязкого) окончательные результаты (17) и (21) для суммарного удлинения систем совпали. Подумайте самостоятельно, всегда ли будет иметь место подобное совпадение.