

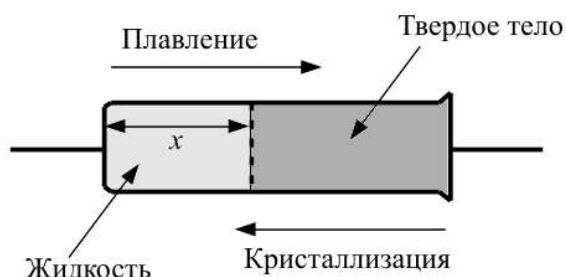
2. На грани

Условие

Задача 10.2. На грани...

Удельное сопротивление металлов в жидком состоянии значительно больше, чем в твердом. Например, жидкая медь или жидкий свинец приблизительно в два раза хуже проводят электрический ток. При этом их плотность увеличивается очень незначительно. В этой задаче Вам предстоит исследовать резистор, находящийся на грани перехода из одного агрегатного состояния в другое.

Исследуемый элемент изображен на рисунке. Непроводящая оболочка имеет незначительное сужение с одной стороны и расширение с другой. Это сделано для того, чтобы плавление твердого проводника начиналось слева, а кристаллизация справа. При расчетах пренебрегайте этими участками и считайте форму проводника цилиндрической. Также считайте, что граница раздела жидкой и твердой фаз всегда перпендикулярна оси системы (см. рисунок).



В данной задаче температура исследуемого элемента будет всегда близка к температуре плавления (немного больше, немного меньше), поэтому можете пренебречь зависимостью удельного сопротивления материала от температуры.

Часть 1. Исследование элемента

Сопротивление проводника в твердом состоянии равно R_0 , а в жидком в два раза больше. Длина проводника равна l .

1.1 Чему равно сопротивление элемента, если длина расплавившейся области равна x ?

Оболочка элемента рассеивает тепло в атмосферу, причем мощность тепловых потерь прямо пропорциональна разности температур элемента и окружающей среды. Температура окружающей среды остается постоянной.

Напряжение на элементе медленно увеличивают, и при некотором значении U_0 температура элемента достигает температуры плавления материала.

2.1 При каком напряжении материал элемента полностью расплавится?

3.1 Напряжение на элементе плавно увеличивается от $0,5U_0$ до $2U_0$. Нарисуйте график зависимости сопротивления элемента от напряжения.

4.1 Изобразите вольтамперную характеристику (ВАХ) элемента — зависимость тока от напряжения — в том же диапазоне, что и в предыдущем пункте.

Часть 2. Элемент и резистор

Последовательно к элементу подключают резистор с сопротивлением $r = R_0$. На цепь подают напряжение U .

2.1 В каком интервале напряжений (U_{MIN} и U_{MAX}) материал элемента будет частично расплавлен?

2.2 Определите значение тока в цепи в трех различных случаях: $U = U_{MIN}$, $U = U_{MAX}$, $U = (U_{MAX} + U_{MIN})/2$

Последовательно к элементу подключают резистор с сопротивлением $r = 2R_0$.

2.3 Как будет изменяться сила тока при медленном увеличении напряжения от $2U_0$ до $4U_0$.

Решение

Задача 10.2. На грани...

На грани. Решение

1.1 Сопротивление элемента равно сопротивлению двух последовательно соединенных проводников. Один (жидкий) имеет сопротивление:

$$R_{ж} = 2R_0 \frac{x}{l}, \quad (1)$$

другой (твердый):

$$R_T = R_0 \frac{l - x}{l}. \quad (2)$$

Таким образом, сопротивление элемента равно:

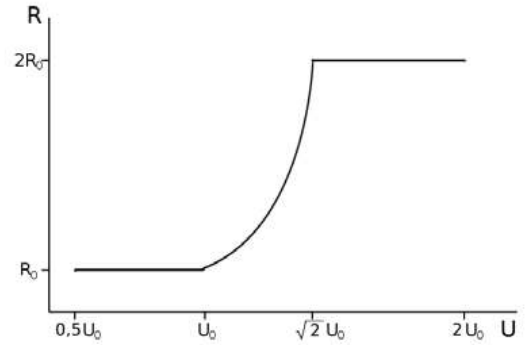
$$R = R_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right). \quad (3)$$

1.2 Напряжение меняется медленно, поэтому в любой момент времени мощность тепловых потерь равна мощности тепловыделения вследствие протекания тока. Т. к. в течение плавления температура элемента не изменяется, то не изменяется и мощность тепловых потерь, а значит, выполняется условие:

$$\frac{U^2}{R} = const = \frac{U_0^2}{R_0}. \quad (4)$$

В расплавленном состоянии сопротивление элемента равно $2R_0$, следовательно, напряжение на элементе равно:

$$U = U_0\sqrt{2}. \quad (5)$$



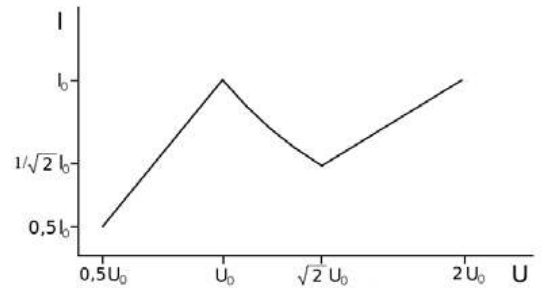
1.3 При напряжении меньшем U_0 (твердое состояние) сопротивление равно R_0 . При напряжении большем $U_0\sqrt{2}$ материал элемента полностью расплавлен и сопротивление равно $2R_0$. Между этими значениями, исходя из (4), зависимость сопротивления элемента от напряжения имеет вид:

$$R = R_0 \frac{U^2}{U_0^2}. \quad (6)$$

График зависимости представлен на рисунке.

1.4 При напряжении меньшем U_0 и большем $U_0\sqrt{2}$ ВАХ элемента — прямая линия с наклоном R_0 и $2R_0$ соответственно. На участке плавления зависимость тока от напряжения имеет вид:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0^2}{R_0 U} = \frac{U_0 I_0}{U}, \quad (7)$$



где $I_0 = U_0/R_0$. ВАХ элемента изображена на рисунке.

2.1 Плавление начнется, когда напряжение на элементе достигнет значения U_0 . Т. к. до этого материал элемента находился в твердом состоянии с сопротивлением R_0 , то плавление начнется, когда напряжение на всей цепи будет в два раза больше.

Предположим, что напряжение на всей цепи достаточно высокое, чтобы материал элемента находился в расплавленном состоянии (сопротивление $2R_0$). Начнем постепенно уменьшать напряжение. Кристаллизация начинается при напряжении на элементе $U_0\sqrt{2}$. Тогда напряжение на всей цепи равно $\frac{3}{\sqrt{2}}U_0$. Таким образом материал элемента будет частично расплавлен при:

$$U \in \left(2U_0; \frac{3}{\sqrt{2}}U_0 \right). \quad (8)$$

2.2 Сила тока в цепи в крайних случаях очевидно равна $I_0 = U_0/R_0$ и $I_0\sqrt{2}$. Когда элемент находится в промежуточном состоянии, сила тока определяется решением уравнения:

$$IR_0 + \frac{I_0 U_0}{I} = U, \quad (9)$$

где IR_0 — напряжение на резисторе;

$\frac{I_0 U_0}{I}$ — напряжение на элементе.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$I = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4R_0 I_0 U_0}}{2R_0} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4U_0^2}}{2R_0} = \frac{U_0}{R_0} \left(\frac{\frac{U}{U_0} \pm \sqrt{\frac{U^2}{U_0^2} - 4}}{2} \right). \quad (10)$$

Подставляя значение $U = U_0 \left(\frac{2+3/\sqrt{2}}{2} \right)$, получим два решения:

$$I = 1,28 \frac{U_0}{R_0} \quad (11)$$

$$I = 0,782 \frac{U_0}{R_0}. \quad (12)$$

Очевидно, что решение (11) не имеет смысла, т. к. при таком токе материал элемента полностью расплавлен. Поэтому верным является решение (12).

2.3 Вначале определим, при каком напряжении элемент начинает плавиться, а при каком кристаллизоваться. Рассуждая аналогично п.2.1, получим: $U_{\text{MIN}} = 3U_0$ и $U_{\text{MAX}} = 2\sqrt{2}U_0 = 2,82U_0$, что выглядит довольно противоречиво. Попробуем решить задачу с помощью ВАХ элемента. Для определения тока необходимо решить уравнение:

$$U_{\text{эл}} + U_{\text{РЕЗ}} = U, \quad (13)$$

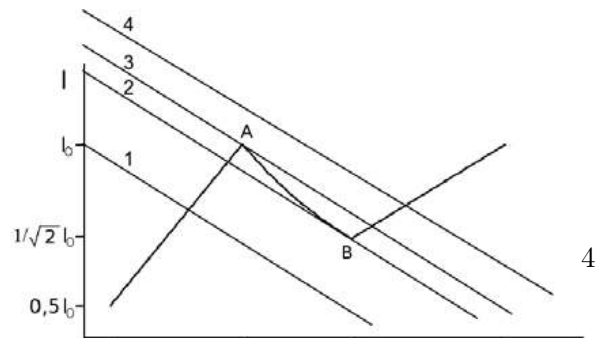
или в другой форме:

$$U_{\text{эл}} = U - 2R_0 I. \quad (14)$$

Точка пересечения ВАХ элемента с прямой $U - 2R_0 I$ даст решение уравнения.

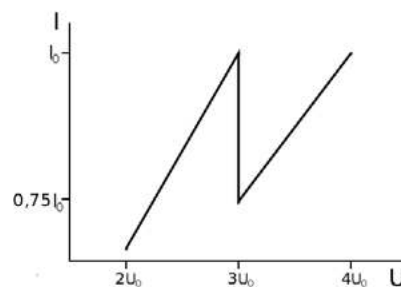
На графике изображены четыре прямых, соответствующих различным напряжениям.

Видим, что при некоторых напряжениях (прямые 2 и 3), одновременно существуют два решения. Одно — при сопротивлении элемента R_0 , другое — при $2R_0$. Прямые, проходящие между 2 и 3, пересекают ВАХ три раза. Однако заметим, что



для того, чтобы «перепрыгнуть» с прямолинейного участка ВАХ в точку В или в точку, лежащую на гиперболическом участке, материал элемента должен начать плавиться. А этого не произойдет до тех пор, пока напряжение на нем не достигнет U_0 (точка А). Поэтому, вплоть до напряжения на всей цепи $U_{MIN} = 3U_0$, ток будет линейно увеличиваться от значения $\frac{2U_0}{3R_0} = \frac{2}{3}I_0 = 0,67I_0$ до $\frac{3U_0}{3R_0} = I_0$.

При дальнейшем увеличении напряжения сразу произойдет переход на второй прямолинейный участок ВАХ. Физически это означает, что как только начинается плавление и сопротивление элемента возрастает, мощность, выделяемая в проводнике, становится больше рассеиваемой мощности. Поэтому устойчивые состояния с частично расплавленным материалом не реализуются. Таким образом, ток в цепи достаточно быстро (за время, необходимое для плавления материала) уменьшится до значения $\frac{3U_0}{4R_0} = \frac{3}{4}I_0 = 0,75I_0$.



Затем ток будет линейно увеличиваться до значения $\frac{4U_0}{4R_0} = I_0$.

График зависимости тока в цепи от напряжения представлен на рисунке.

Заметим, что при уменьшении напряжения зависимость тока от напряжения несколько изменится, т. к. переход из жидкого состояния в твердое начнется при достижении точки В, т. е. при напряжении $U_{MAX} = 2\sqrt{2}U_0 = 2,82U_0$.