

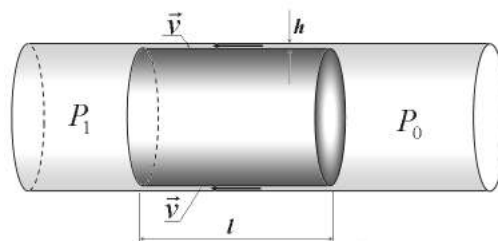
Условие

Задача 2. «Просачивание»

Внутри цилиндрической трубки с внутренним радиусом R находится сплошной цилиндр длиной l , радиус которого незначительно отличается от R . Между стенками трубки и боковой поверхностью цилиндра существует тонкий зазор толщиной h . Во всех пунктах данной задачи будем полагать, что толщина этого зазора постоянна и $h \ll R$. Из этого условия следует, что средняя скорость течения жидкости в зазоре значительно превышает скорость движения цилиндра. Поэтому при расчете сил вязкого трения движением цилиндра можно пренебречь и считать, что сила, действующая на движущийся цилиндр, равна силе, действующей на цилиндр неподвижный.

При протекании жидкости через зазор на стенки трубки и боковую поверхность цилиндра действует со стороны жидкости сила трения (вязкого). Величина этой силы, действующей на единицу площади поверхности (как внутренней поверхности трубки, так и боковой поверхности цилиндра), определяется по формуле

$$f = \gamma \frac{v_{\text{ср.}}}{h}, \quad (1)$$

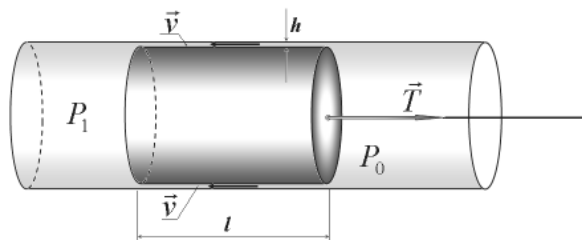


где $v_{\text{ср.}}$ - средняя скорость течения жидкости в зазоре¹,

γ - постоянный коэффициент, зависящий только от свойств жидкости, который считайте известным. Такая же по модулю сила действует и на движущуюся жидкость. Понятно, что для того, чтобы жидкость протекала через зазор, необходимо создать некоторую разность давлений $\Delta P = P_0 - P_1$ с разных сторон цилиндра.

1. Неподвижный цилиндр.

Пусть цилиндр закреплен внутри цилиндра с помощью нити. С разных сторон цилиндра создана разность давлений $P_0 - P_1 = \Delta P$.



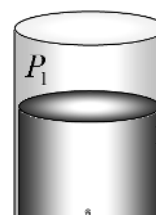
1.1 Определите среднюю скорость течения жидкости в зазоре $v_{\text{ср.}}$.

1.2 Определите расход жидкости (объем, протекающий за единицу времени) в зазоре.

1.3 Определите силу натяжения нити. Почему, и на сколько эта сила отличается от разности сил давления?

2. «Тонем и всплываем!»

Трубку с цилиндром расположили вертикали и закрыли ее нижний торец. Верх-



ний торец открыт, жидкость полностью заполняет трубку. Плотность жидкости обозначим ρ_0 , а плотность материала цилиндра ρ_1 , причем $\rho_1 > \rho_0$.

2.1 Пусть цилиндр опускается с постоянной скоростью u . Чему равна средняя скорость движения жидкости в зазоре?

—

¹ Строго говоря, скорость течения жидкости в зазоре зависит от расстояния до стенки, однако для решения данной задачи нет необходимости рассматривать точное распределение скоростей жидкости, вполне достаточно определить именно среднюю скорость течения в зазоре.

2.2 Определите разность давлений жидкости между нижним и верхним основаниями цилиндра $\Delta P = P_0 - P_1$. Почему, и на сколько отличается эта разность давлений от гидростатического давления столба жидкости в зазоре?

2.3 Найдите скорость u , с которой будет опускаться цилиндр.

Рассмотрим всплытие цилиндра. Пусть плотность материала цилиндра меньше плотности жидкости $\rho_1 < \rho_0$.

2.4 Определите разность давлений жидкости между нижним и верхним основаниями цилиндра $\Delta P = P_0 - P_1$ в этом случае.

2.5 Определите скорость u , с которой будет всплывать цилиндр.

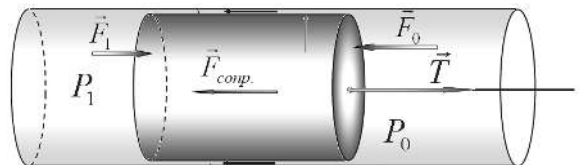
Решение

Задача 2. «Просачивание»

1. Неподвижный цилиндр.

Сумма сил, действующих на цилиндр равна нулю, так как он покоится, поэтому

$$\Delta P \cdot \pi R^2 + F_{\text{сопр.}} = T, \quad (1)$$



здесь $\Delta P \cdot \pi R^2 = F_0 - F_1$ - разность сил давления жидкости на торцы цилиндра;

$$F_{\text{сопр.}} = \gamma \frac{\nu}{h} \cdot 2\pi Rl \quad (2)$$

- сила вязкого трения, действующая со стороны движущейся жидкости на боковую поверхность цилиндра. Жидкость в зазоре движется с постоянной скоростью, поэтому сумма сил, действующих на нее также равна нулю, поэтому можно записать

$$\Delta P \cdot 2\pi Rh = 2F_{\text{сопр.}} \quad (3)$$

Здесь и далее, мы учитываем малость толщины зазора, поэтому его площадь поперечного сечения может быть записана в виде (если пренебречь малой величиной h^2)

$$s = \pi(R + h)^2 - \pi R^2 \approx 2\pi Rh. \quad (4)$$

При записи уравнения (3) также следует учесть, что на жидкость действуют силы вязкого трения, как со стороны боковой поверхности цилиндра, так и со стороны внутренней поверхности трубки, причем различием в их площадях можно пренебречь. Из уравнений (1), (3) находим

$$\begin{aligned} F_{\text{сопр.}} &= \pi Rh \cdot \Delta P \\ T &= \pi R^2 \Delta P \left(1 + \frac{h}{R}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Как следует из последней формулы, сила натяжения нити превышает разность сил давления на величину силы вязкого трения, действующей на боковую поверхность цилиндра. Приравняв силу трения к ее выражению через среднюю скорость течения воды в зазоре

$$\pi Rh \cdot \Delta P = \gamma \frac{\nu}{h} \cdot 2\pi Rl, \quad (6)$$

находим

$$\nu = \frac{h^2}{2\gamma l} \Delta P. \quad (7)$$

Расход жидкости равен средней скорости, умноженной на площадь поперечного сечения потока

$$q = 2\pi Rh \cdot \nu = \frac{\pi Rh^3}{\gamma l} \Delta P. \quad (8)$$

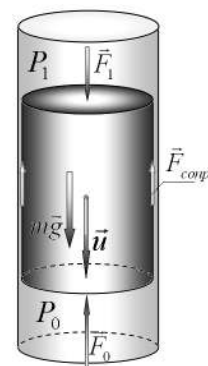
Обратите внимание на сильную зависимость расхода жидкости от толщины зазора, например, при уменьшении толщины зазора в 2 раза расход уменьшается в 8 раз!

2. «Тонем и всплываем!»

Данная часть задачи отличается от предыдущей, тем, что необходимо учитывать действие силы тяжести, как на цилиндр, так и на движущуюся жидкость. Так как на жидкость в зазоре и на цилиндр действуют тормозящие силы, зависящие от скоростей движения. По-прежнему, векторная сумма сил, действующих на цилиндр, равна нулю, поэтому

$$mg - \pi R^2 \Delta P - F_{\text{сопр.}} = 0. \quad (9)$$

Запишем также выражение для массы цилиндра



$$m = \pi R^2 l \rho_1. \quad (10)$$

Второе уравнение выражает условие постоянства скорости жидкости в зазоре (то есть сумма сил, действующих на нее равна нулю):

$$2\pi R h \Delta P - 2\pi R h l \rho_0 g - 2F_{\text{сопр.}} = 0, \quad (11)$$

где второе слагаемое есть сила тяжести, действующая на жидкость.

Из уравнения (9) выразим силу сопротивления (с учетом выражения для массы цилиндра (10)) и подставим ее в уравнение (11)

$$2\pi R h \Delta P - 2\pi R h l \rho_0 g - 2(\pi R^2 l \rho_1 g - \pi R^2 \Delta P) = 0.$$

Из этого уравнения выражаем значения разности давлений

$$\Delta P = \frac{\rho_1 g l + \frac{h}{R} \rho_0 g l}{1 + \frac{h}{R}} \quad (12)$$

Полученное выражение принципиально отличается от формулы для гидростатического давления столба жидкости в зазоре $(\Delta P)_{\text{статическое}} = \rho_0 g l$. Разность сил давлений (см. (9)) равна силе тяжести цилиндра уменьшенной на силу вязкого трения. Иными словами, формулы гидростатики не применимы при движении жидкости. Основные условия гидростатики – условия равновесия, а в данном случае главное – условия установившегося движения жидкости (и цилиндра). При движении тела в жидкости происходит такое перераспределение давлений, которое и обеспечивает условия стационарности потоков.

Эту идею можно развить и далее - формула для гидростатической силы Архимеда также «не работает» в данном случае. Сумма сил давлений жидкости на цилиндр равна весу цилиндра (минус сила сопротивления), а не весу жидкости вытесненной цилиндром! Формально, разность между полученным выражением (12) и гидростатическим давлением выражается формулой

$$\frac{\rho_1 g l + \frac{h}{R} \rho_0 g l}{1 + \frac{h}{R}} - \rho_0 g l = \frac{\rho_1 g l + \rho_0 g l}{1 + \frac{h}{R}} \approx (\rho_1 - \rho_0) g l. \quad (13)$$

Найдем из уравнения (9) силу сопротивления, действующую на поверхность диска

$$F_{\text{сопр.}} = \pi R^2 l \rho_1 g - \pi R^2 \Delta P = \pi R^2 \frac{\frac{h}{R} \rho_1 g l - \frac{h}{R} \rho_0 g l}{1 + \frac{h}{R}} \approx \pi R^2 \frac{h}{R} (\rho_1 - \rho_0) g l. \quad (14)$$

С другой стороны эта же сила выражается через среднюю скорость жидкости

$$F_{\text{сопр.}} = 2\pi Rl\gamma \frac{v}{h}. \quad (15)$$

Скорость течения жидкости в зазоре связана со скоростью движения цилиндра условием постоянства объема жидкости (объем жидкости вытесненной цилиндром равен объему жидкости, протекающей в зазоре):

$$2\pi R h v = \pi R^2 u. \quad (16)$$

Из этого уравнения легко найти среднюю скорость движения жидкости в зазоре

$$v = \frac{R}{2h} u. \quad (17)$$

Отметим, что скорость течения жидкости значительно превышает скорость движения цилиндра (из $R \gg h \Rightarrow v \gg u$), что оправдывает сделанное в условии о практической независимости силы сопротивления от скорости движения цилиндра) Теперь решим систему уравнений (14)-(16). Находим

$$2\pi R h v = \pi R^2 u \Rightarrow 2\pi R v = \frac{\pi R^2}{h} u;$$

$$F_{\text{сопр.}} = 2\pi R l \gamma \frac{v}{h} = \frac{\pi R^2 l}{h^2} \gamma u$$

Наконец из равенства

$$\frac{\pi R^2 l}{h^2} u = \pi R^2 \frac{h}{R} (\rho_1 - \rho_0) g l$$

определяем

$$u = \frac{h^3}{\gamma R} (\rho_1 - \rho_0) g. \quad (17)$$

Решение задачи при всплывании цилиндра аналогично.



Суммарная сила, действующая на цилиндр, равна нулю:

$$\begin{aligned} mg - \pi R^2 \Delta P + F_{\text{сопр.}} &= 0 \\ \pi R^2 l \rho_1 g - \pi R^2 \Delta P + F_{\text{сопр.}} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Суммарная сила, действующая на жидкость в зазоре, равна нулю

$$2\pi R h \Delta P - 2\pi R h l \rho_0 g + 2F_{\text{сопр.}} = 0, \quad (19)$$

Исключая из этих уравнений силу сопротивления, находим разность давлений

$$\Delta P = \frac{\rho_1 g l + \frac{h}{R} \rho_0 g l}{1 + \frac{h}{R}}. \quad (20)$$

Скорость опускания цилиндра находим, выражая силу сопротивления через среднюю скорость жидкости в зазоре и уравнение неразрывности. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$u = \frac{h^3}{\gamma R} (\rho_0 - \rho_1) g. \quad (21)$$

¹ , , Строго говоря скорость течения жидкости в зазоре зависит от расстояния до стенки и для решения данной задачи нет необходимости рассматривать точное распределение скоростей жидкости, вполне достаточно определить именно среднюю скорость течения в зазоре.