

Условие

Как измерить радиус кривизны с помощью секундомера?

Теория предсказывает как должно быть, а эксперимент показывает как оно есть на самом деле.

***Во время теоретического тура вы должны были решить задачу о расчете периодов колебаний полукольца. Сегодня вам предстоит проверить экспериментально полученные формулы. А затем исследовать более сложную колебательную систему, форма которой не известно как описывается теоретически.

Приборы и оборудование.***

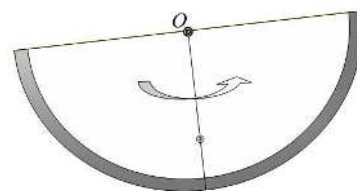
1. Пластиковое полукольцо. 2. Линейка гибкая пластмассовая (40 см) 3. Скотч узкий. 4. Штатив с лапкой и зажимом 5. Секундомер 6. Лезвие для бритвы 7. Нитка с грузиком для изготовления отвеса 8. Нитки. 9. Лист миллиметровой бумаги формата А3.

Лезвие используйте в качестве упора при изучении колебаний, закрепив его в лапке штатива. Будьте осторожны! Лист миллиметровой бумаги можете использовать для измерения длин (если у вас нет своей линейки), кроме того, рекомендуем на нем проводить необходимые построения, если вы считаете необходимым то этот лист с **подписанными построениями** следует сдать в жюри, возможно, что ваш труд будет оценен!

Часть 1. Полукольцо.

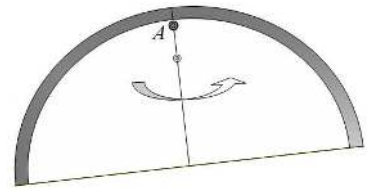
Края полукольца скрепите полоской скотча.

1.1 Определите экспериментально положение центра масс кольца. Не забудьте кратко описать методику проведения эксперимента.



1.2 Подвесьте полукольцо за середину скотча (центр полукольца). Измерьте с максимальной точностью период колебаний. Сравните полученные результаты с теоретической формулой. Напоминаем, формула для периода таких колебаний имеет вид

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R}{2g}}. \quad (1)$$



1.2 Подвесьте кольцо за вершину полукольца. Измерьте с максимальной точностью период колебаний. Сравните полученные результат с теоретической формулой.

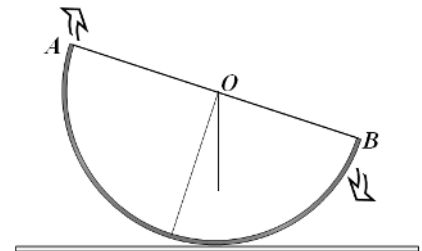
Напоминаем, формула для периода таких колебаний имеет вид

$$T_2 = 2\pi\sqrt{2\frac{R}{g}} \quad (2)$$

1.3 Поставьте полукольцо на горизонтальную поверхность. Измерьте с максимальной точностью период «качательных» колебаний. Проследите, чтобы во время движения не было проскальзывания по столу. Сравните полученные результат с теоретической формулой.

Напоминаем, формула для периода таких колебаний имеет вид

$$T_3 = 2\pi\sqrt{(\pi - 2)\frac{R}{g}}. \quad (3)$$

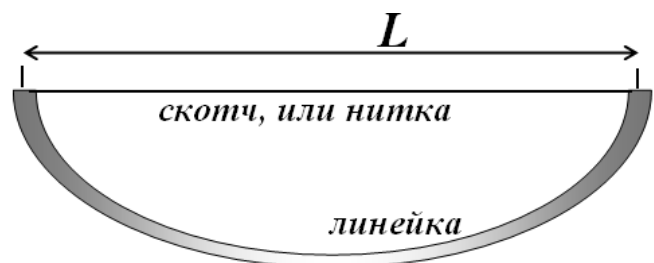


1.4 Сделайте вид, что вам неизвестны ни радиус полукольца, ни ускорение свободного падения (число π считайте известным). В этом случае для проверки формул, можно найти отношение периодов различных типов колебаний. Используя результаты измерений рассчитайте отношения периодов трех типов колебаний. Сравните полученные значения с теоретическими предсказаниями.

Часть 2. Изогнутая линейка.

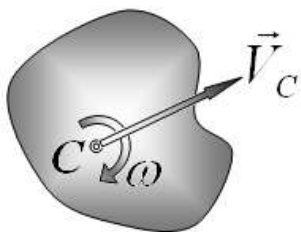
В данной части задания вам необходимо исследовать колебания изогнутой пластмассовой линейки. Линейку согните и закрепите с помощью полоски скотча (или нитки, как вам удобнее).

Расстояние между краями линейки L не должно быть меньше 30 см, иначе линейка может сломаться, а новой могут и не дать!



Настоятельно рекомендуем сделать нужный изгиб линейки и провести все необходимые измерения при сделанном изгибе, а затем изменять изгиб. Возможно, что второй раз линейка изогнется чуть по другому!

Ненужное теоретическое введение (для любопытных).



Кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета и при переходе от одной к другой инерциальной системе отсчета изменяется.

В системе отсчета, в которой центр масс твердого тела покоится, кинетическая энергия вращения твердого тела вокруг фиксированной оси может быть представлена в виде

$$E_C = \frac{J_0 \omega^2}{2},$$

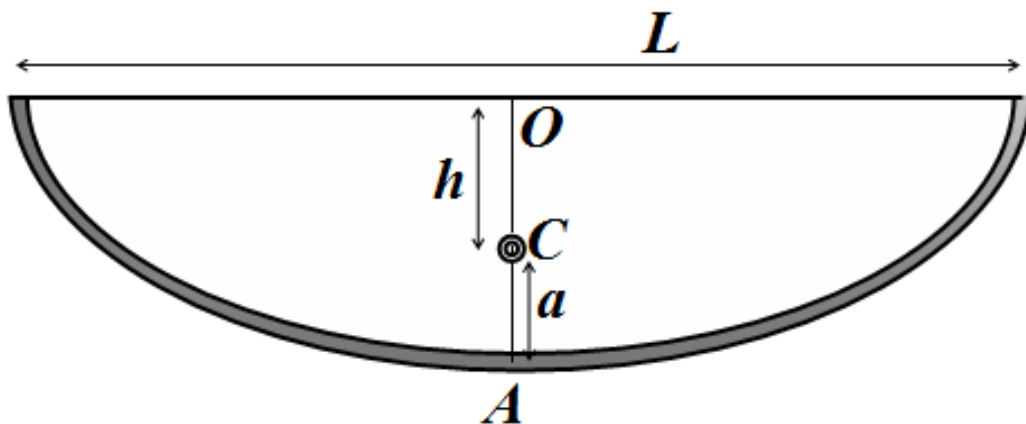
где $\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ - угловая скорость вращения тела, J_0 - постоянный коэффициент, зависящий от массы, размеров и формы тела. Эта характеристика тела называется его моментом инерции, часто

его представляют в виде $J_0 = mb^2$, где b - некоторая постоянная, имеющая размерность длины, часто ее называют радиус инерции.

При плоскопараллельном движении твердого тела (когда ось вращения не изменяет своего направления в пространстве), кинетическая энергия такого движения может быть представлена в виде

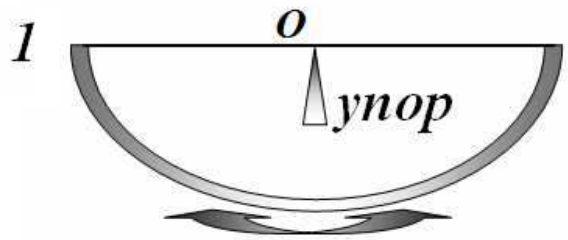
$$E = E_C + \frac{mV_c^2}{2},$$

где E_C - кинетическая энергия в системе отсчета, связанной с центром масс тела (энергия вращательного движения); V_C - скорость центра масс тела (второе слагаемое – кинетическая энергия поступательного движения). Эти идеи используются при выводе приведенных ниже формул (вам их выводить не надо).



В своей работе используйте следующие обозначения: C - центр масс линейки; A - середина линейки (вершина); O - середина скотча (центр); h - расстояние от центра скотча до центра масс; a - расстояние от центра масс до середины линейки; L - расстояние между краями изогнутой линейки.

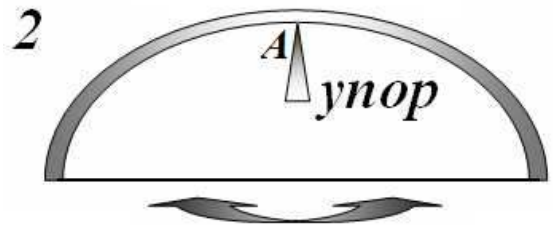
Вам будет необходимо исследовать три типа колебаний:



1. Колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр скотча O (в прямом подвесе). Период этих колебаний определяется формулой

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{b^2 + h^2}{gh}} \quad (4)$$

2. Колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр линейки A (в перевернутом подвесе).



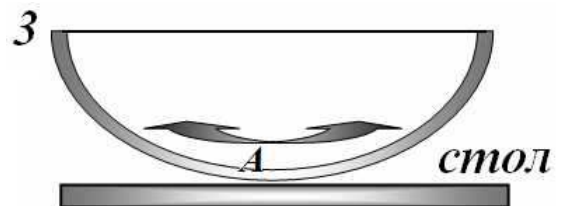
Период этих колебаний определяется формулой

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{ga}} \quad (5)$$

3. Качания на столе.

Следите, чтобы не было проскальзывания, на скользкий стол можете положить, что-нибудь шероховатое (например лист бумаги)! Период этих колебаний определяется формулой

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{b^2 + h^2}{g(R - a)}} \quad (6)$$



Здесь R - радиус кривизны нижней части линейки.

****В формулах (4)-(6) параметр b один и тот же, но он может изменяться при изменении изгиба линейки.****

Наконец задания:

Настоятельно рекомендуем сделать нужный изгиб линейки и провести все необходимые измерения при сделанном изгибе, а затем изменять изгиб. Возможно, что второй раз линейка изогнется чуть по другому! Старайтесь проводить все измерения тщательно и аккуратно, для получения хороших результатов (и баллов) нужна достаточно высокая точность!

2.1 Измерьте зависимость положения центра масс линейки h и a от величины L . Методику измерения положения центра масс предложите самостоятельно, кратко опишите ее. Постройте график зависимости $h(L)$.

2.2 Измерьте зависимости периодов трех типов колебаний от расстояния между концами линейки L . Постройте графики полученных зависимостей.

2.3 На основании измеренных данных, проверьте, согласуются ли формулы для периодов колебаний (4)-(5). Свой ответ обоснуйте расчетами, графиками.

2.4 Предположим, что параметр b не изменяется при изменении изгиба линейки. Используя результаты эксперимента проверьте данное предположение. Укажите диапазон изменения величины L , в котором ваши экспериментальные данные позволяют считать b постоянным. Определите ее значение с максимально возможной точностью.

2.5 Считая величину b постоянной и известной (равной рассчитанной вами), проверьте еще раз согласование формул (4)-(5). Предложите такую линеаризацию зависимости периодов, чтобы их графики совпадали. Постройте эти графики.

2.6 Постройте график зависимости радиуса кривизны нижней части линейки от величины L , используя свои экспериментальные данные. Считая, что форма изогнутой линейки является дугой окружности, рассчитайте зависимость радиуса этой дуги от величины L . Сравните эту зависимость с полученной вами экспериментально. Укажите диапазон изменения L , в котором форму изогнутой линейки можно считать дугой окружности.

2.7 Для одного значения L (выберите его самостоятельно) постройте на миллиметровой бумаге профиль изогнутой линейки и с помощью геометрических построений определите его радиус кривизны в нижней точке. Сравните полученный результат с результатом, найденным из измерений периодов различных колебаний.

Последнее. Для облегчения задания во второй части работы рассчитайте погрешности измерения периода колебаний и определения параметров h и a только для одного изгиба и одного типа колебания. Полученные оценки погрешностей используйте при необходимости для всех остальных измерений.

Решение

Как измерить радиус кривизны с помощью секундомера?

1.1-1.3 Для расчета периода колебаний необходимо измерить диаметр полукольца. Так как полукольцо имеет некоторую толщину, то измерим как внешний D_1 , так и его внутренний D_2 диаметры:

$$D_1 = (109 \pm 1)_{\text{мм}}$$

$$D_2 = (101 \pm 1)_{\text{мм}}$$

В данном случае основная погрешность есть приборная, в качестве которой взята цена деления линейки. Рассчитаем значения периодов колебаний по приведенным формулам (заменяя в них радиус на диаметр):

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{D_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81}} \approx 0,587\text{с}; \quad \Delta T_1 = \frac{1}{2}T_1\frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{1}{2}0,587\frac{1}{109} \approx 0,003\text{с}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{D_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81}} \approx 0,662\text{с}; \quad \Delta T_2 = \frac{1}{2}T_2\frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{1}{2}0,662\frac{1}{109} \approx 0,003\text{с}$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{\pi - 2}{2}\frac{D_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi - 2}{2}\frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81}} \approx 0,500\text{с}; \quad \Delta T_3 = \frac{1}{2}T_3\frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{1}{2}0,500\frac{1}{109} \approx 0,003\text{с}$$

Для повышения точности измерения и оценки случайных погрешностей проведем несколько (у нас 5) измерений времен 15 колебаний. Предварительный эксперимент показывает, что большее число колебаний измерить сложно из-за их затухания. Результаты измерений и их обработки приведены в Таблице 1. Случайная погрешность измерения времени рассчитывалась по формуле⁴

$$\Delta t = 3\sqrt{\frac{\sum_i (t_i - \langle t \rangle)^2}{N(N-1)}}. \quad (1)$$

где N - число измерений. Погрешность измерения периода равна $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$, где $n = 15$ - число колебаний в одном измерении.

Таблица 1. Результаты измерений и их обработки.

	Колебания 1	Колебания 2	Колебания 3
Время 15 колебаний	8,83	10,24	7,72
	8,94	10,25	7,74
	8,91	10,20	7,67
	8,85	10,28	7,72
	8,96	10,28	7,75
Среднее время 15 колебаний	8,883	10,243	7,713
Среднее значение периода	0,593	0,683	0,515
Погрешность измерения времени	0,076	0,044	0,041
Погрешность измерения периода	0,0050	0,0030	0,0028

Для наглядного сравнения результатов расчетов и измерений сведем их в одну таблицу 2.

⁴ Не следует строго следовать приведенному расчету погрешностей. Допустим и упрощенный вариант, по среднему модулю отклонения.

Таблица 2. Результаты расчетов и измерений.

	Колебания 1	Колебания 2	Колебания 3
Расчет	$(0,583 \pm 0,03)c$	$(0,662 \pm 0,03)c$	$(0,500 \pm 0,03)c$
Измерения	$(0,593 \pm 0,05)c$	$(0,683 \pm 0,03)c$	$(0,515 \pm 0,03)c$

Как видно из Таблицы 2 наблюдается неплохое соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями. Небольшие расхождения в случае колебаний 1 и 3 типов, скорее всего, обусловлены неучтенной в расчетах толщиной полукольца.

Это предположение подтверждает заметное расхождение (явно выходящее за пределы погрешности) для колебаний 2 типа. В этом случае можно уточнить теоретическую формулу. В формулах для периода колебаний (ссылаемся на решение задачи теоретического тура) в знаменателе стоит величина равная расстоянию от оси вращения до центра масс, поэтому формула (2) из условия задачи может быть уточнена:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{D_1}{g} \cdot \frac{D_1}{D_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81} \cdot \frac{109}{101}} \approx 0,688 c. \quad (2)$$

При таком уточнении мы получаем лучшее соответствие с экспериментальными данными.

1.4 Рассчитаем отношения периодов колебаний. Погрешность измерения отношения периодов рассчитывается по формуле⁵

$$\Delta \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{T_1}{T_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta T_1}{T_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta T_2}{T_2} \right)^2} \quad (3)$$

Теоретическое отношение периодов может быть рассчитано «без погрешностей». Результаты расчетов также представим в Таблице 3.

Таблица 3. Отношение периодов.

	$\frac{T_1}{T_2}$	$\frac{T_1}{T_3}$	$\frac{T_2}{T_3}$
Теоретическое	$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = 0,8862$	$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} = 1,173$	$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2}{(\pi - 2)}} = 1,324$
Экспериментальное	$0,868 \pm 0,011$	$1,151 \pm 0,011$	$1,326 \pm 0,010$

Со всеми ранее сделанными оговорками можно говорить о соответствии результатов расчетов и измерений.

—

⁵ Допустим и упрощенный метод расчета $\Delta \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{T_1}{T_2} \left(\left| \frac{\Delta T_1}{T_1} \right| + \left| \frac{\Delta T_2}{T_2} \right| \right)$

Часть 2.

2.1 – 2.2 Для измерения положения центра масс можно подвесить линейку (со скотчем) за один из ее концов и рядом отвес. На самой линейке засечь точку пересечения x . После этого на листе бумаги зарисовать линейку, провести линию отвеса (через конец линейки и точку пересечения отвесом) и ось симметрии изогнутой линейки. Точка пересечения этих прямых и будет центром масс. Затем необходимо измерить требуемые геометрические величины a , h .

Периоды всех типов колебаний измеряются стандартно.

Результаты измерений (среднее значения периодов рассчитаны по 3 измерениям) представлены в Таблице 4 и на Графике 1.

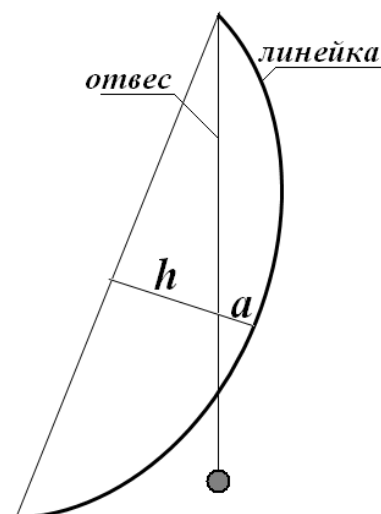
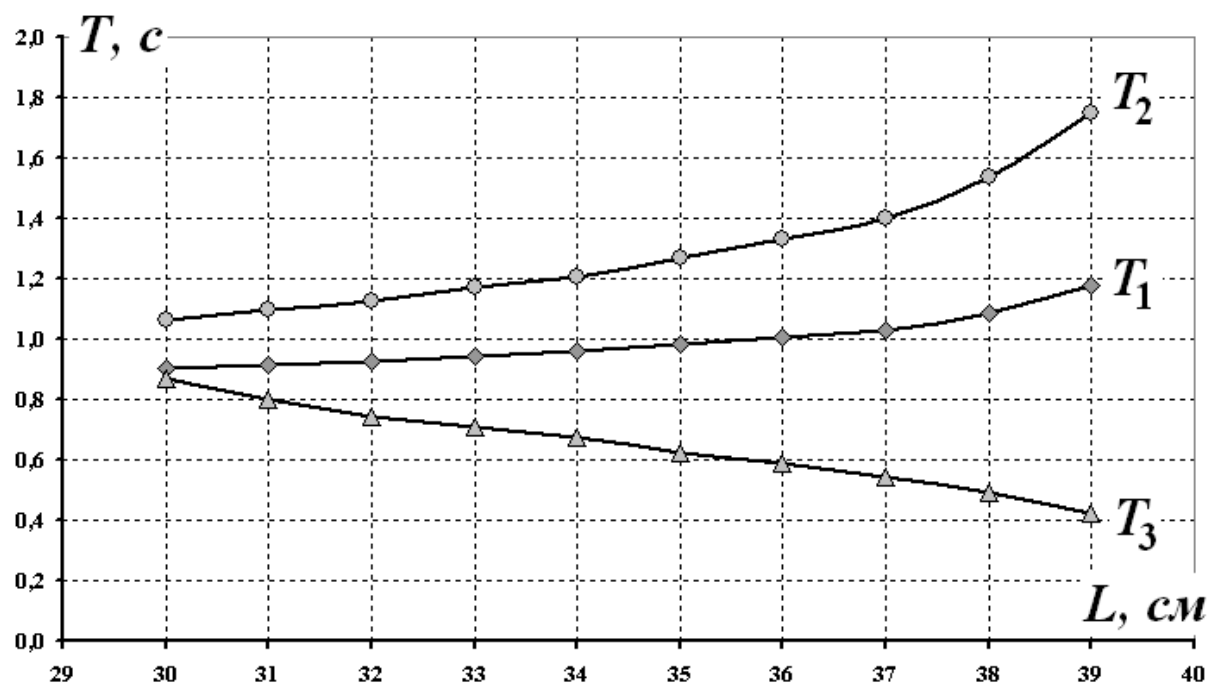


Таблица 4. Зависимости периодов колебаний от изгиба линейки.

L, см	a, см	h, см	$\langle T_2 \rangle$, с	$\langle T_1 \rangle$, с	$\langle T_3 \rangle$, с	$(b^2)_1$, см²	$(b^2)_2$, см²
39	3,6	1,5	1,747	1,176	0,425	111,5	108,6
38	4,7	2,1	1,536	1,087	0,493	116,7	116,8
37	5,0	2,7	1,402	1,031	0,540	107,9	123,1
36	5,7	2,9	1,333	1,008	0,587	112,2	118,5
35	6,3	3,2	1,270	0,984	0,624	112,8	117,1
34	6,7	3,4	1,208	0,961	0,676	109,8	111,1
33	6,7	4,0	1,171	0,946	0,706	104,9	119,9
32	7,0	4,3	1,124	0,928	0,745	101,7	116,3
31	7,5	4,4	1,097	0,912	0,802	99,5	111,9
30	7,5	4,8	1,065	0,904	0,871	97,0	112,2

График 1. Зависимости периодов колебаний от изгиба линейки.



2.3 Для проверки согласования формул (4) – (5) выразим из них значения параметра b^2 :

$$\begin{aligned}(b^2)_1 &= \frac{gh}{4\pi^2} T_1^2 - h^2 \\ (b^2)_2 &= \frac{ga}{4\pi^2} T_1^2 - a^2\end{aligned}\quad (4)$$

Результаты расчетов этих параметров для различных значений изгибов линейки представлены в последних столбцах Таблицы 4 и на Графике 2.

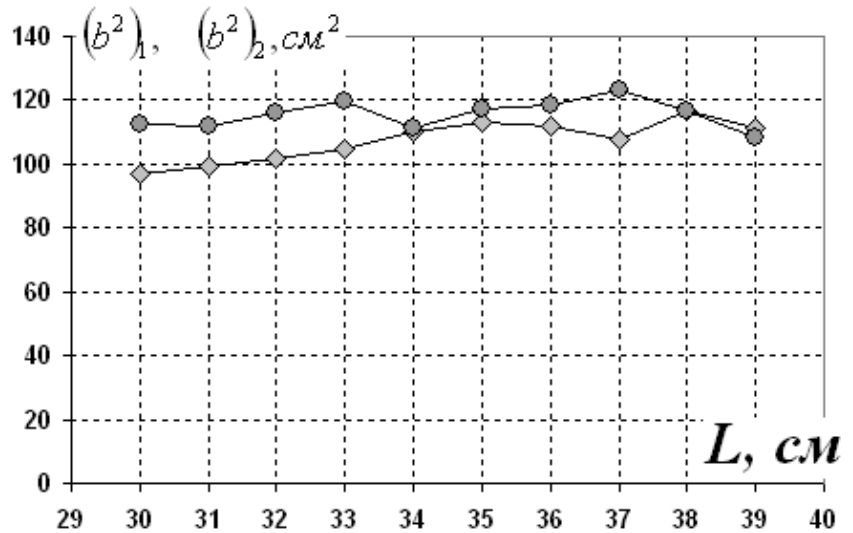


График 2. Зависимости параметров $(b^2)_1, (b^2)_2$ от изгиба линейки.

Погрешность измерения периода составляет величину порядка 2%, погрешность измерения положения центра масс - порядка 10%, поэтому погрешность определения данных параметров составляет не менее 10%. Следовательно, можно говорить о том, что рассчитанные значения данных параметров соответствуют друг другу в пределах погрешности измерений.

Если считать параметр b^2 постоянным, то его значение следует взять равным среднему арифметическому из всех рассчитанных значений с погрешностью равной примерно 10%.

Расчет этой величины приводит к значениям

$$\begin{aligned}\langle b^2 \rangle &= (110 \pm 10) \text{ см}^2 \\ \langle b \rangle &= (10,5 \pm 0,5) \text{ см}\end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что значения параметра b^2 могут лежать в интервале $[100, 120] \text{ см}^2$ и при этом в пределах погрешности его можно считать постоянным⁶.

Линеаризация зависимостей может быть проведена различными способами. С нашей точки зрения наиболее эстетично выглядит «симметричная»:

$$\begin{aligned} T_1^2 &= \frac{4\pi^2 b}{g} \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right) \\ T_2^2 &= \frac{4\pi^2 a}{g} \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

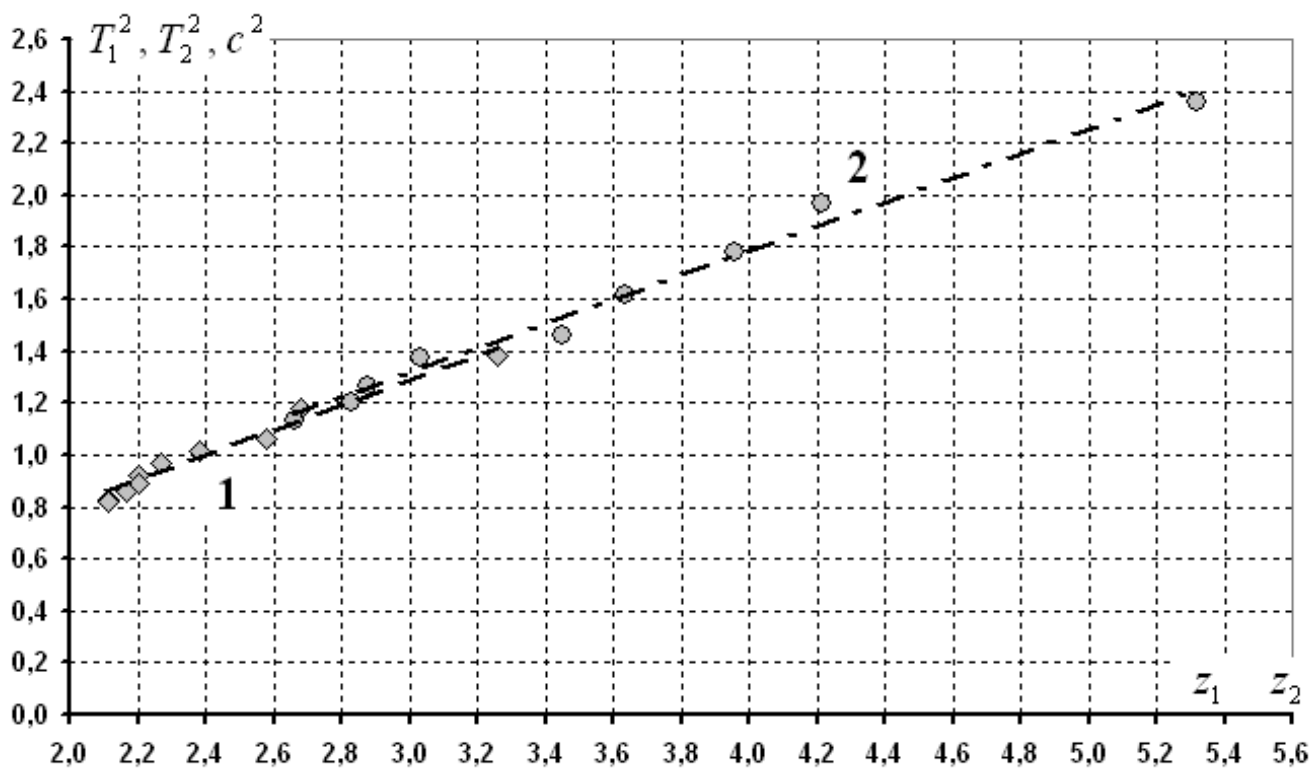
⁶ В качестве допустимого разброса значений этого параметра также можно взять стандартное отклонение, рассчитанное по всем значениям данного параметра. По приведенным данным оно равно $\sigma_b \approx 6$ см, что примерно совпадает с полученной выше оценкой разброса.

Таблица 5. Линеаризация зависимостей периодов от деформации.

$z_1 = \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b}\right)$	T_1^2, c^2	$z_2 = \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a}\right)$	T_2^2, c^2
3,260	1,383	7,379	3,053
2,682	1,182	5,317	2,360
2,576	1,063	4,215	1,965
2,385	1,015	3,956	1,777
2,267	0,968	3,633	1,613
2,205	0,924	3,453	1,460
2,205	0,894	3,034	1,372
2,167	0,861	2,875	1,264
2,114	0,831	2,828	1,203
2,114	0,817	2,663	1,135

Построим графики зависимостей квадратов периодов T_1^2, T_2^2 от соответствующего аргумента z_1, z_2 (График 3)

График 3. Линеаризация зависимостей.



Из графиков линеаризованных зависимостей хорошо видно, полученные зависимости, во-первых, линейны; во-вторых, описываются одной функцией (в пределах погрешности):

$$T^2 = az + c,$$

где для первого типа колебаний

$$a = (0,49 \pm 0,06)c^2; \quad b = (-0,17 \pm 0,14)c^2$$

для второго типа колебаний

$$a = (0,47 \pm 0,03)c^2; \quad b = (-0,09 \pm 0,12)c^2$$

Таким образом, можно считать, что в пределах погрешностей измерений приведенные формулы правильно описывают экспериментальные данные по зависимостям периодов колебаний первого и второго типа от деформации линейки.

2.6 Из формул (4), (6) следует, что отношение квадратов периодов соответствующих колебаний равно

$$\frac{T_1^2}{T_3^2} = \frac{R - a}{h}, \quad (6)$$

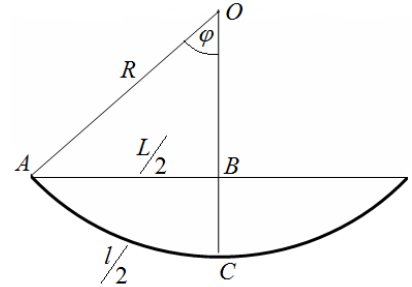
что позволяет рассчитать радиус кривизны изгиба линейки по формуле

$$R = a + h \frac{T_1^2}{T_3^2}. \quad (7)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 6.

Получим уравнение для расчета радиуса кривизны по измерению расстояния между концами линейки. Из рисунка следует, что угол дуги линейки (в предположении, что это дуга окружности) может быть представлен в виде: из длины дуги AC : $\varphi = \frac{l}{2R}$; (где $l = 41,7$ см - длина линейки); из треугольника OAB : $\sin \varphi = \frac{L}{2R}$, Разделив эти уравнения друг на друга, получим уравнение для определения угла φ :

$$\varphi = \frac{l}{L} \sin \varphi.$$



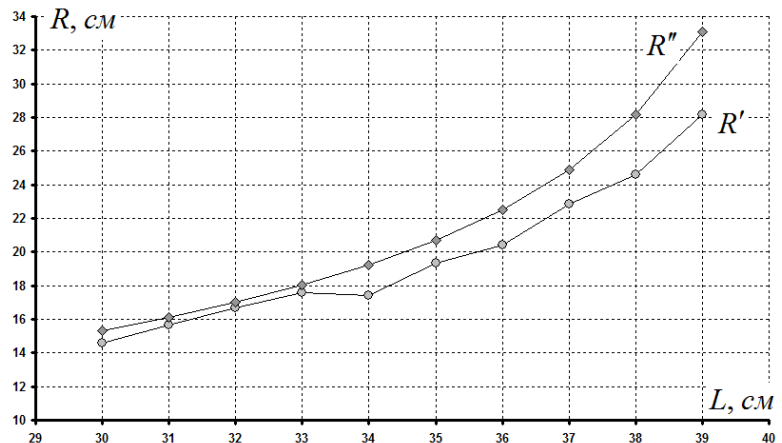
Решить это уравнение можно численно (причем это решение требует достаточно громоздких расчетов). Найдя угол φ , можно рассчитать искомое значение радиуса кривизны $R = \frac{l}{2\varphi}$.

В Таблице 6 и на графике 4 показаны результаты расчетов радиуса кривизны по измеренным периодам колебаний (R') и по измерению расстояния между концами изогнутой линейки (R'')

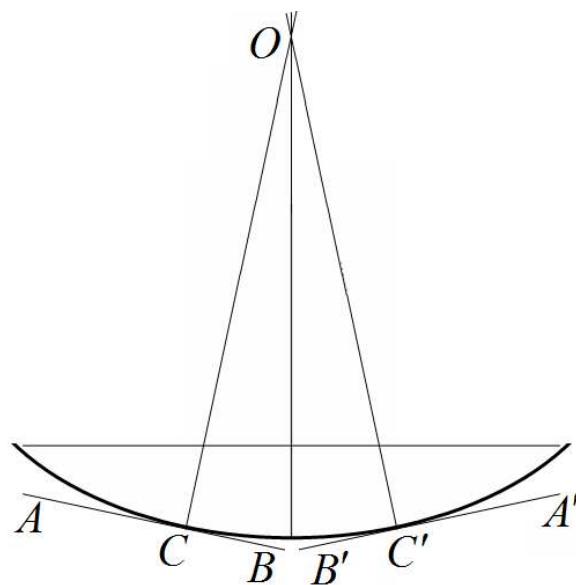
Таблица 6.

График 4. Зависимость радиуса кривизны линейки от величины изгиба.

Г



Полученные результаты свидетельствуют, что данные, полученные двумя способами близки друг к другу, причем результаты ближе друг другу при больших изгибах (т.е. при меньших L). В нашем случае изогнутую линейку можно считать дугой окружности при $L < 34$ см.



Радиус кривизны можно также приближенно найти геометрическими построениями. Для этого к профилю линейки необходимо построить две касательных в точках C и C' (близкие к середине линейки) - AB и $A'B'$, восстановить к ним перпендикуляры. Точка их пересечения будет являться центром кривизны. Такие построения для $L = 35\text{см}$ дали результат $R \approx 20\text{см}$, что хорошо согласуется с рассчитанными данными.

⁴ . , Неследует строго следовать приведенному расчету погрешностей Допустим упрощенный вариант по среднему модулю отклонения.