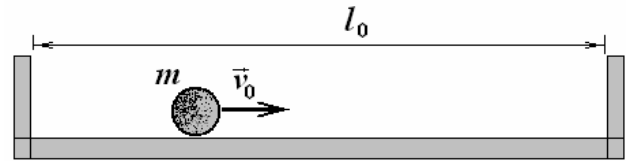


Условие

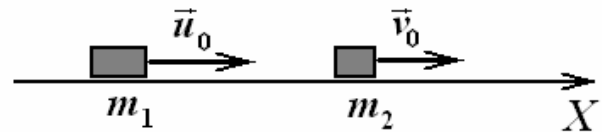
Задание 3. *«Сила и импульс»***

3.1 Небольшой упругий шарик массы m быстро движется со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, ограниченной двумя стенками, находящимися на расстоянии l друг от друга. Найдите среднюю силу давления шарика на одну из стенок, считая все удары шарика о стенки абсолютно упругими.



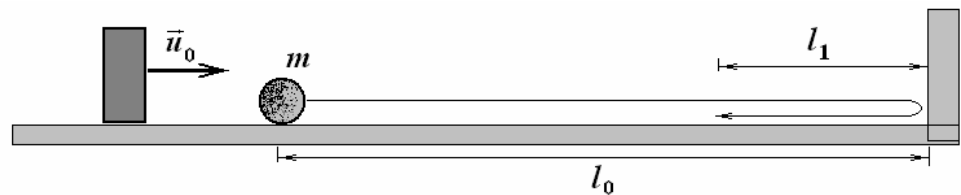
Пояснение. Сила давления возникает из-за ударов шарика о стенку. В соответствии со вторым законом Ньютона средняя сила равна отношению импульса, полученного стенкой ко времени, в течение которого этот импульс был получен $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. В данном случае усреднение должно проводиться за промежуток времени Δt , значительно превышающий время между ударами шарика о стенку.*

3.2 Два упругих тела движутся вдоль оси Ox : тело массы m_1 со скоростью u_0 , тело массы m_2 со скоростью v_0 . Тела сталкиваются абсолютно упруго.



3.1.1 Найдите скорости тел после столкновения.

3.1.2 Допустим, масса второго тела пренебрежимо мала. Чему будут равны скорости тел после столкновения в этом случае.



3.3 Рассмотрим движение тяжелого поршня и легкого шарика массы m , (который можно считать материальной точкой) по гладкой горизонтальной поверхности, ограниченной вертикальной стенкой. Столкновения шарика с поршнем и стенкой абсолютно упругие. Поршень движется с малой постоянной скоростью u_0 по направлению к стенке. Первоначально шарик находится на расстоянии l_0 от стенки.

3.3.1 Чему будет равна скорость шарика v_1 после его столкновения с поршнем?

3.3.2 На каком расстоянии l_1 от стенки шарик столкнется с поршнем следующий раз? Через какой промежуток времени τ_1 произойдет это столкновение?

3.3.3 Найдите скорость шарика v_k после k -того столкновения с поршнем (k - номер удара шарика о поршень). На каком расстоянии l_k произойдет следующее столкновение? Через какой промежуток времени τ_k оно произойдет?

Выразите величины v_k, l_k, τ_k в явном виде через заданные значения l_0 и u_0 .

3.3.4 Покажите, что средняя сила давления шарика на стенку F , зависит от расстояния поршня до стенки l по закону

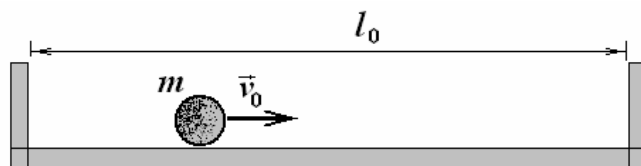
$$F = Al^\gamma,$$

где A и γ - постоянные величины. Найдите, чему они равны.

По-прежнему считайте, что промежуток времени, за который происходит усреднение, значительно больше времени между ударами шарика о стенку. Также можно считать, что число столкновений шарика с поршнем очень велико.

Решение

<u>Задание 3. *«Сила и импульс»***



3.1 Импульс, полученный стенкой за одно столкновение равен

$$\Delta p = 2mv_0, \quad (1)$$

время между ударами, очевидно, равно

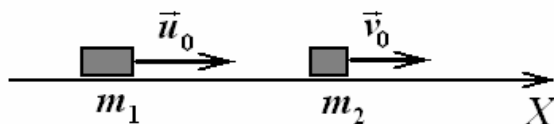
$$\Delta t = 2\frac{l_0}{v_0} \quad (2)$$

Следовательно, средняя сила давления шарика на стенку равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{l_0}.$$

3.2 Для определения скоростей тел после соударения следует воспользоваться законами сохранения импульса и механической энергии

$$\frac{m_1 u_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2}{2}.$$



Для решения системы уравнений, преобразуем их и разделим одно на другое:

$$\begin{cases} m_1(u_0^2 - u_1^2) = m_2(v_1^2 - v_0^2) \\ m_1(u_0 - u_1) = m_2(v_1 - v_0) \end{cases} \Rightarrow u_0 + u_1 = v_1 + v_0 \Rightarrow v_1 = u_0 - v_0 + u_1.$$

Тем самым, получаем систему двух линейных уравнений, решение которых находится легко

$$m_1 u_0 + m_2 v_0 = m_1 u_1 + m_2 (u_0 - v_0 + u_1) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_0 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \\ v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_0 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \end{cases}.$$

Если масса второго тела пренебрежимо мала ($m_2 \approx 0$), то из формул (5) следует

$$\begin{cases} u_1 = u_0 \\ v_1 = 2u_0 - v_0 \end{cases}.$$

3.3.1 Полагая в формуле (6) $v_0 = 0$, находим скорость шарика после первого удара

$$v_1 = 2u_0.$$

3.3.2 До следующего столкновения поршень пройдет расстояние $(l_0 - l_1)$, а шарик $(l_0 + l_1)$. Приравнявая их времена движения, получим уравнение

$$\frac{l_0 - l_1}{u_0} = \frac{l_0 + l_1}{2u_0}.$$



Из которого находим точку второго удара

$$l_1 = \frac{1}{3} l_0.$$

И время между ударами

$$\tau_1 = \frac{l_0 - l_1}{u_0} = \frac{2}{3} \frac{l_0}{u_0}.$$

3.3.3 Из формул (6) следует, что после каждого удара скорость шарика увеличивается на $2u_0$ (следует учесть, что шарик при всяком ударе летит навстречу поршню):

$$v_k = 2u_0 + v_{k-1}.$$

Таким образом, скорости шарика после ударов образуют арифметическую прогрессию, поэтому явное выражение для скорости шарика после k -того столкновения с поршнем имеет вид

$$v_k = 2k \cdot u_0. \quad (12)$$

Чтобы установить связь между координатами точек последовательных ударов запишем уравнение, аналогичное уравнению (8), из которого определим

$$\frac{l_{k-1} - l_k}{u_0} = \frac{l_{k-1} + l_k}{v_k} = \frac{l_{k-1} + l_k}{2ku_0} \Rightarrow l_k = \frac{2k-1}{2k+1} l_{k-1}. \quad (13)$$

Последовательно подставляя значения легко найти, что

$$l_k = \frac{1}{2k+1} l_0. \quad (14)$$

Время между последовательными ударами рассчитывается по формуле

$$\tau_k = \frac{l_{k-1} - l_k}{u_0} = \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \frac{l_0}{u_0} = \frac{2}{4k^2 - 1} \frac{l_0}{u_0}. \quad (15)$$

Средняя сила давления шарика на поршень после k -того удара равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{2v_k}{\tau_k} = m \frac{2 \cdot 2k \cdot u_0}{\frac{2}{4k^2 - 1} \frac{l_0}{u_0}} = 2k(4k^2 - 1) \frac{mu_0^2}{l_0}. \quad (16)$$

После большого числа ударов ($k \gg 1$) можно считать, что $(4k^2 - 1) \approx 4k^2$, и $\frac{l_0}{l_k} = 2k - 1 \approx 2k$, поэтому

$$F = 2k(4k^2 - 1) \frac{mu_0^2}{l_0} \approx 8k^3 \frac{mu_0^2}{l_0} \approx \frac{mu_0^2}{l_0} \left(\frac{l_0}{l} \right)^3. \quad (17)$$

Следовательно, $\gamma = -3$, $A = mu_0^2 l_0^2$.