

## Условие

### Задание 2. «Ваттметр»

Существует множество хитроумных устройств, измеряющих мощность в цепи постоянного тока. Принцип их работы сводится к тому, чтобы каким-либо способом перемножить ток и напряжение на нагрузке. Мы предлагаем Вам рассмотреть наиболее простую схему такого устройства, состоящую из резисторов, вольтметра и двух диодов.

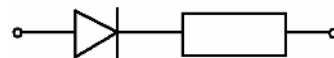
**2.1.** Сначала разберемся с диодом. Этот полупроводниковый прибор является нелинейным элементом, т.е. сила тока не пропорциональна напряжению. В данной задаче диоды будут включаться в прямом направлении. В этом случае можно считать, что сила тока пропорциональна квадрату напряжения:

$$I_D = kU_D^2,$$

где  $k$  — известный коэффициент.

<sup>1</sup> Механизм разделения зарядов в восходящих потоках очень сложен и в данной задаче не рассматривается.

**2.1.1** Рассмотрим участок цепи, состоящей из последовательно включенного диода и резистора с сопротивлением  $R$  (рис. 1). Разность потенциалов на участке равна  $\Delta\varphi$ . Определите силу тока, текущего в этом участке.



**2.1.2** Определите разность потенциалов на резисторе  $\Delta\varphi_R$ .

**2.1.3** Покажите, что если выполняется условие:

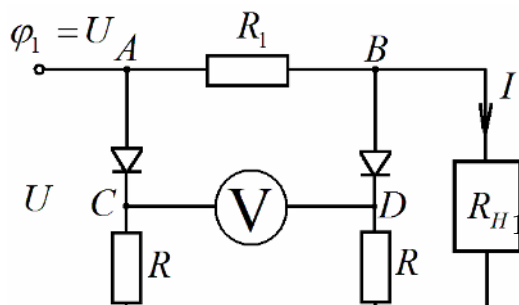
$$kR\Delta\varphi \ll 1,$$

то сила тока в таком участке  $I \approx k(\Delta\varphi)^2$ , а разность потенциалов на резисторе  $\Delta\varphi_R \approx Rk(\Delta\varphi)^2$ .

Воспользуйтесь формулой приближенного вычисления:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad x \ll 1.$$

**2.2** Схема ваттметра представлена на рис.2. Устройство состоит из двух участков с диодами ( $AE$  и  $BF$ ), резистора  $R_1$  и вольтметра. Сопротивление резистора  $R$ , гораздо больше сопротивления нагрузки ( $R \gg R_H$ ). Кроме того, выполняется условие пункта 1.3:  $kR\Delta\varphi \ll 1$



1. Вольтметр – идеальный, т.е. обладает очень большим сопротивлением.

**2.2.1** Напряжение в цепи равно  $U$ , сила тока, текущего в нагрузке, равна  $I$ . Выберем потенциал нижнего проводника равным нулю ( $\varphi_0 = 0$  В), а потенциал второго проводника, идущего от источника напряжения,  $\varphi_1 = U$  (точка  $A$  на рис. 2). Определите потенциалы точек  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

**2.2.2** Определите разность потенциалов между точками  $C$  и  $D$ . Преобразуйте, полученное выражение к виду:

$$U_V = \xi IU.$$

Выразите коэффициент  $\xi$  через  $k$ ,  $R$ ,  $R_1$  и  $R_H$ .

**2.2.3** Покажите, что при малом сопротивлении резистора  $R_1$  по сравнению с сопротивлением нагрузки ( $R_1 \ll R_H$ ), коэффициент  $\xi$  не зависит от  $R_H$ , а определяется только характеристиками элементов ваттметра.

**2.2.4** Определите относительную погрешность  $\eta$  измерения мощности в приближении, описанном в предыдущем пункте.

## Решение

### Задание 2. «Ваттметр»

1.1 Если по участку течет ток  $I$ , то падение напряжения на диоде

$$U_D = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{k}}, \quad (1)$$

а напряжение на резисторе

$$U_R = IR. \quad (2)$$

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов на всем участке цепи:

$$U_D + U_R = \Delta\varphi. \quad (3)$$

Подставляя значения (1) и (2), получим квадратное уравнение относительно  $\sqrt{I}$ :

$$IR + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{I} - \Delta\varphi = 0. \quad (4)$$

Физический смысл имеет только положительный корень этого уравнения:

$$\sqrt{I} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}}. \quad (5)$$

Тогда

$$I = \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \right)^2. \quad (6)$$

1.2 Разность потенциалов на резисторе:

$$\Delta\varphi_R = IR = \left( \frac{-1 + \sqrt{1 + 4kR\Delta\varphi}}{2R\sqrt{k}} \right)^2 R. \quad (7)$$

1.3 При выполнении условия  $kR\Delta\varphi \ll 1$ , формула (6) преобразуется к виду:

$$I \approx \left( \frac{-1 + (1 + 2kR\Delta\varphi)}{2R\sqrt{k}} \right)^2 = k(\Delta\varphi)^2, \quad (8)$$

а формула (7) – к виду:

$$\Delta\varphi_R = Rk(\Delta\varphi)^2. \quad (9)$$

2.1 Т.к.  $R \gg R_n$ , то ток через резисторы  $R_1$  равен току через нагрузку. Поэтому падение напряжения на резисторе  $R_1$ :

$$U_1 = IR_1. \quad (10)$$

Тогда потенциал точки  $B$ :

$$\varphi_B = U - U_1 = U - IR_1. \quad (11)$$

Напряжение на участке  $AE$  равно  $U$ . Напряжение на резисторе  $R$  определим, воспользовавшись выражением (9):

$$\Delta\varphi_{RAE} = RkU^2. \quad (12)$$

Тогда потенциал точки  $C$ :

$$\varphi_C = 0 + \Delta\varphi_{RAE} = RkU^2. \quad (13)$$

Напряжение на участке  $BF$  равно  $\varphi_B = U - IR_1$ . Поэтому напряжение на резисторе  $R$ :

$$\Delta\varphi_{RBF} = Rk(U - IR_1)^2 \quad (14)$$

Потенциал точки  $D$ :

$$\varphi_D = 0 + \Delta\varphi_{RBF} = Rk(U - IR_1)^2. \quad (15)$$

2.2 Разность потенциалов между точками  $C$  и  $D$ :

$$\begin{aligned} U_V = \varphi_C - \varphi_D &= RkU^2 - Rk(U - IR_1)^2 = \\ &= 2kRR_1UI - kRR_1^2I^2 = 2kRR_1UI \left(1 - \frac{R_1I}{2U}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Ток и напряжения связаны законом Ома, т.е.:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R_{\text{н}} + R_1}. \quad (17)$$

Поэтому показания вольтметра:

$$U_V = 2kRR_1UI \left(1 - \frac{R_1}{2(R_1 + R_{\text{н}})}\right). \quad (18)$$

Коэффициент  $\xi$ :

$$\xi = 2kRR_1 \left(1 - \frac{R_1}{2(R_1 + R_{\text{н}})}\right). \quad (19)$$

2.3 При выполнении условия  $R_1 \ll R_{\text{н}}$  выражение для коэффициента  $\xi$  принимает вид:

$$\xi = 2kRR_1, \quad (19)$$

Т.е. действительно не зависит от сопротивления нагрузки. 2.4 Относительная погрешность измерения:

$$\eta = \frac{kRR_1^2}{R_1 + R_{\text{н}}} \approx \frac{kRR_1^2}{R_{\text{н}}}.$$


---


$$2R\sqrt{k}$$