

Условие

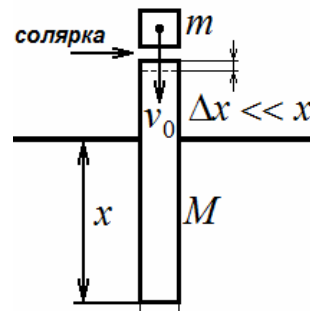
Задача 2. «Копёр»

Предлагаем Вам рассмотреть работу устройства для забивания свай в твёрдый грунт. Принцип работы копра очень простой. По вертикально установленной свае (масса сваи M) ударяет молот (масса молота m), часть механической энергии молота передаётся свае, которая постепенно забивается в землю. Для поддержания работы копра, в область соударения

молота и сваи подаётся некоторое количество солярки, которая при сжатии взрывается и выделяет определённое количество энергии.

Будем считать для простоты, что сила трения, действующая на сваю при её движении в грунте, прямо пропорциональна длине вбитой части ($F_{\text{тр}} = kx$, k - известная постоянная).

Удары молота о сваю будем считать абсолютно упругими. Также будем считать, что трение сваи о грунт настолько велико, что при одном ударе свая опускается на очень маленькое расстояние ($\Delta x_0 \ll x_0$).



Часть 1. Горячее не подаётся.

1. Скорость молота в момент времени, предшествующий соударению равна v_0 . После соударения свая получит определённую энергию $E_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{mv_0^2}{2}$, а модуль скорости молота уменьшится и станет равным $v_1 = \xi \cdot v_0$. Выразите постоянные ε_1 и ξ через массы молота и сваи. Далее считайте эти постоянные известными.

2. Длина вбитой части сваи равна x_0 . Определите Δx_0 для удара, описанного в предыдущем пункте.

Часть 2. Включают подачу горячего.

3. Количество солярки, подаваемой в место соударения, регулируют таким образом, чтобы модуль скорости молота после соударения со свайей не изменялся. Энергия, переданная свае, в этом случае также может быть выражена в виде $E_2 = \varepsilon_2 \cdot \frac{mv_0^2}{2}$, где v_0 - скорость молота до (и после) соударения. Определите ε_2 .

4. При такой подаче топлива, глубина погружения сваи после i -го удара (Δx_i) может быть выражена через погружение после предыдущего удара (Δx_{i-1}) и длину вбитой части сваи (x_i) следующим образом: $\Delta x_i \approx \Delta x_{i-1} \left(1 + \frac{\lambda}{x_i}\right)$. Определите коэффициент λ .

5. Начнём считать удары молота в тот момент, когда длина вбитой части сваи равна x_1 . После предыдущего удара свая опустилась на Δx_0 . Используя соотношение, приведённое в предыдущем пункте и, по-прежнему, считая, что $\Delta x_i \ll x_i$, оцените на сколько опустится свая после 10 ударов. Выразите ответ через x_1 , Δx_0 и λ .

6. После погружения сваи на необходимую глубину, подачу горячего прекращают. Через какое время T после последнего удара с включённой подачей горячего удары молота прекратятся? До прекращения подачи топлива, скорость молота перед ударами равнялась v_0 .

Примечание. Скорее всего, Вам пригодится приближенная формула: $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$.

Решение

Задача 2. «Копёр»

1. Запишем законы сохранения импульса и энергии.

$$\begin{cases} mv_0 = -mv_1 + P \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + E_1 \end{cases}$$

где P и E_1 — импульс и энергия сваи после удара.

Импульс и энергия связаны соотношением:

$$P = \sqrt{2ME_1}$$

Подставляя в систему (1), приведённые в условии выражения: $E_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{mv_0^2}{2}$ и $v_1 = \xi \cdot v_0$, а также используя соотношение (2), получим:

$$\begin{cases} 1 = -\xi + \sqrt{\frac{M}{m}}\sqrt{\varepsilon_1} \\ 1 = \xi^2 + \varepsilon_1 \end{cases}$$

Решая систему (3), получим:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{M-m}{M+m} \\ \varepsilon_1 &= \frac{4mM}{(M+m)^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Т.к. трение велико, то можно считать, что сила трения — величина постоянная и равна:

$$F_{TP} = kx_0, \tag{6}$$

Для определения Δx_0 приравняем модуль работы сил трения к энергии E_1 , полученной свайей после удара.

$$E_1 = F_{TP}\Delta x_0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \frac{mv_0^2}{2} = kx_0\Delta x_0, \tag{7}$$

$$\Delta x_0 = \frac{\varepsilon_1}{kx_0} \cdot \frac{mv_0^2}{2}. \tag{8}$$

3. Т.к. молот после удара отлетает с такой же скоростью, то из закона сохранения импульса

$$mv_0 = -mv_0 + P \quad (9)$$

сразу же получаем:

$$P = 2mv_0. \quad (10)$$

Используя соотношение (2), находим:

$$E_2 = \frac{P^2}{2M} = \frac{4m^2v_0^2}{2M} = 4\frac{m}{M}\frac{mv_0^2}{2}. \quad (11)$$

Поэтому

$$\varepsilon_2 = 4\frac{m}{M}. \quad (12)$$

4. Подача топлива регулируется таким образом, что после удара молот обладает такой же энергией. Свая при этом опускается на некоторую глубину Δx_i . Т.е., когда молот снова опустится, его кинетическая энергия станет больше на величину

$$\Delta E = mg\Delta x_{i-1}, \quad (13)$$

и станет равной

$$\frac{mv_0'^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mg\Delta x_{i-1}. \quad (14)$$

Используя результат второго пункта (8), получим:

$$\Delta x_i = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \cdot \frac{mv_0'^2}{2} = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \left(\frac{mv_0^2}{2} + mg\Delta x_{i-1} \right). \quad (15)$$

Кинетическая энергия $\frac{mv_0^2}{2}$ может быть выражена через глубину погружения после предыдущего удара (опять используем формулу (8)):

$$\Delta x_{i-1} = \frac{\varepsilon_1}{kx_{i-1}} \cdot \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \Delta x_{i-1} \frac{kx_{i-1}}{\varepsilon_1}. \quad (16)$$

Тогда выражение (15) запишется в следующем виде:

$$\Delta x_i = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \left(\Delta x_{i-1} \frac{kx_{i-1}}{\varepsilon_1} + mg\Delta x_{i-1} \right) = \Delta x_{i-1} \left(\frac{x_{i-1}}{x_i} + \frac{mg\varepsilon_1}{kx_i} \right). \quad (17)$$

Т.к. $\Delta x \ll x$, то с большой точностью

$$\frac{x_{i-1}}{x_i} \approx 1. \quad (18)$$

Тогда искомая постоянная:

$$\lambda = \frac{mg\mathcal{E}_1}{k}$$

5. Будем использовать соотношение, приведённое в четвёртом пункте. После первого удара свая погрузится на глубину

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right)$$

После второго:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1 + \Delta x_1} \right) = \Delta x_0 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{x_1 + \Delta x_1} \right)$$

Т.к. с одной стороны $\Delta x_i \ll x_i$, а с другой мы проводим лишь оценку, то величиной Δx_1 в знаменателе можно пренебречь. Тогда

$$\Delta x_2 = \Delta x_0 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right)^2$$

Воспользуемся формулой приближённого вычисления $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

$$\Delta x_2 \approx \Delta x_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda}{x_1} \right)$$

Проведем аналогичные рассуждения, для погружения после третьего удара:

$$\begin{aligned} \Delta x_2 &= \Delta x_2 \left(1 + \frac{\lambda}{x_2 + \Delta x_2} \right) = \Delta x_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2} \right) \approx \\ &\approx \Delta x_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right) \approx \Delta x_0 \left(1 + 3 \frac{\lambda}{x_1} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, для оценки можно принять, что

$$\Delta x_i \approx \Delta x_0 \left(1 + i \cdot \frac{\lambda}{x_1} \right)$$

Используя формулу для суммы арифметической прогрессии, получим приближённое выражение для величины погружения после десяти ударов:

$$h \approx \Delta x_0 \left(10 + 55 \frac{\lambda}{x_1} \right)$$

Безусловно данная оценка является завышенной.

6. Используем приведенный в первом пункте факт $-v_1 = \xi \cdot v_0$.

После последнего удара с горючим, до первого удара без него пройдет время

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}$$

Промежуток времени между первым и вторым ударом:

$$t_2 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2v_0}{g} \cdot \xi$$

Между вторым и третьим:

$$t_3 = \frac{2v_2}{g} = \frac{2v_0}{g} \cdot \xi^2$$

Таким образом, промежутки времени образуют убывающую геометрическую прогрессию ($\xi < 1$).

Удары прекратятся через время

$$T = \frac{2v_0/g}{1 - \xi}$$