

Условие

Задача 1. «Системы единиц»

1. В атомной и ядерной физике используется система единиц, в основу которой положены такие фундаментальные постоянные как постоянная Планка ($\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с) и скорость света ($c = 3,00 \cdot 10^8$ м/с). В данной системе эти постоянные приравниваются к единице ($\hbar = c = 1$). Легко заметить, что в этом случае размерности времени и расстояния становятся одинаковыми, то же самое происходит с размерностью массы, импульса и энергии.

Предлагает Вам разобраться с этими хитростями.

Если в системе СИ для килограмма, метра и секунды существуют свои эталоны, то в указанной системе единиц двумя эталонами являются постоянная Планка и скорость света. В качестве третьего эталона можно выбрать, например, метр.

Если размерность времени и расстояния одинаковы, то можно время выражать в метрах ($1c = 3,00 \cdot 10^8$ м).

1.1 Массу в такой системе можно измерять в обратных метрах ($1 \text{ кг} = \beta \text{ м}^{-1}$). Чему равен один килограмм?

1.2 Соответственно энергия также измеряется в обратных метрах ($1 \text{ Дж} = \gamma \text{ м}^{-1}$). Чему равен один Джоуль?

В данной системе единиц энергию удобно выражать через электрон-вольты ($1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж). Тогда представляется возможным выразить через электрон-вольты основные единицы СИ, т.е. килограмм, метр и секунду. Другими словами, выбрать в качестве третьего эталона электрон-вольт.

1.3 Сколько обратных электрон-вольт в одном метре?

1.4 Чему равна одна секунда в такой системе?

1.5 Сколько электрон-вольт в одном килограмме?

1.6 В модели атома водорода, электрон вращается вокруг протона по круговой орбите радиуса $a_0 = 2,68 \cdot 10^{-4}$ эВ $^{-1}$, под действием кулоновской силы $F = 1,01 \cdot 10^5$ эВ 2 . Определите кинетическую энергию электрона в атоме водорода.

2. Для удобства вычисления орбит искусственных спутников и проектирования межпланетных полётов, предлагаем ввести не менее удобную в этом случае систему единиц, в которой гравитационная постоянная ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м 3 /кг·с 2) и первая космическая скорость вблизи поверхности Земли ($v_{1K} = 7,91 \cdot 10^3$ м/с) равны единице ($G = v_{1K} = 1$).

Расстояние будем измерять в земных радиусах (зр), ($1 \text{ зр} = 6,37 \cdot 10^6$ м). Земной радиус, таким образом, будет третьим эталоном. При таком выборе килограмм, метр и секунда также могут быть выражены через земной радиус ($1 \text{ м} = \alpha \text{ зр}$, $1 \text{ с} = \beta \text{ зр}$, $1 \text{ кг} = \gamma \text{ зр}$).

2.1 Сколько земных радиусов в одном метре?

2.2 Сколько земных радиусов в одной секунде?

2.3 Чему равен один килограмм в такой системе?

2.4 Радиус Луны $R_{\text{Л}} = 0,273$ зр, а масса Луны $M_{\text{Л}} = 0,0123$ зр. Определите ускорение свободного падения $g_{\text{Л}}$ и первую космическую скорость $v_{\text{Л}}$ вблизи поверхности Луны.

Решение

Задача 1. «Системы единиц»

Указанный в условии задачи факт ($1\text{с} = 3,00 \cdot 10^8 \text{м}$) следует из равенства единицы скорости света:

$$3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1. \quad (1)$$

Проводя аналогичные рассуждения с постоянной Планка, можно получить выражение для килограмма и, соответственно, для всех остальных производных единиц.

1.1 Выразим Джоуль через основные единицы СИ (килограмм, метр и секунду):

$$\text{Дж} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}. \quad (2)$$

Тогда постоянная Планка равна:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}. \quad (3)$$

Подставим значение одной секунды, выраженной через метры и приравняем $\hbar$ к единице.

$$1,05 \cdot 10^{-34} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{3,00 \cdot 10^8 \text{м}} = 1. \quad (4)$$

Решая уравнение (4) относительно килограмма, получим:

$$1 \text{ кг} = 2,86 \cdot 10^{42} \text{ м}^{-1}. \quad (5)$$

1.2 Подставляя выражения для секунды и килограмма в уравнение (2), получим:

$$1 \text{ Дж} = \frac{2,86 \cdot 10^{42} \text{ м}^{-1} \cdot \text{м}^2}{(3,00 \cdot 10^8 \text{ м})^2} = 3,17 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-1}. \quad (6)$$

1.3 Теперь необходимо двигаться в обратном направлении. Знаем, что

$$1 \text{ Дж} = \frac{1}{1,60 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ эВ}. \quad (7)$$

Выражение для одного метра легко получается из выражений (6) и (7):

$$3,17 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-1} = 6,25 \cdot 10^8 \text{ эВ} \Rightarrow 1 \text{ м} = 5,07 \cdot 10^6 \text{ эВ}^{-1}. \quad (8)$$

1.4 Т.к. $1 \text{ с} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м}$, то, используя (8), получим:

$$1 \text{ с} = 1,52 \cdot 10^{15} \text{ эВ}^{-1}. \quad (9)$$

1.5 Используя (5), получим:

$$1 \text{ кг} = 5,64 \cdot 10^{35} \text{ эВ}. \quad (10)$$

1.6 Запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{m_e v^2}{a_0} = F. \quad (11)$$

Отсюда сразу же находим кинетическую энергию электрона:

$$E_K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{F a_0}{2} = 13,5 \text{ эВ}. \quad (12)$$

2.1 Т.к. $1 \text{ зр} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$, то

$$1 \mathcal{M} = \frac{1}{6,37 \cdot 10^6} \text{ зр} = 1,57 \cdot 10^{-7} \text{ зр}$$

2.2 Из равенства первой космической единицы, найдём выражение секунды через метры, а затем и через земные радиусы:

$$1 \text{ с} = 7,91 \cdot 10^3 \mathcal{M} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ зр}$$

2.3 Из равенства единице гравитационной постоянной, получим:

$$1 \kappa 2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathcal{M}^3}{\text{с}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \mathcal{M}^3}{(7,91 \cdot 10^3 \mathcal{M})^2} = 1,07 \cdot 10^{-18} \mathcal{M} = 1,67 \cdot 10^{-25} \text{ зр}$$

Интересно заметить, что в такой системе масса Земли равна земному радиусу, что следует из выражения для первой космической скорости:

$$v_{1K} = \sqrt{G \frac{M}{R}}$$

2.4 Первая космическая скорость вблизи поверхности Луны в такой системе (в формуле (16) $G = 1$):

$$v_{\mathcal{I}} = \sqrt{\frac{M_{\mathcal{I}}}{R_{\mathcal{I}}}} = 0,212$$

Скорость в этой системе - величина безразмерная.

Ускорение свободного падения, вычисляется по формуле Л,0165–1 g==зр (18). Л2 R Л ($G = 1$):

$$g_{\mathcal{I}} = \frac{M_{\mathcal{I}}}{R_{\mathcal{I}}^2} = 0,165_{3p}^{-1}$$

В то время как на поверхности Земли ускорение свободного падения равно одному обратному земному радиусу, т.е. в 6 раз больше.