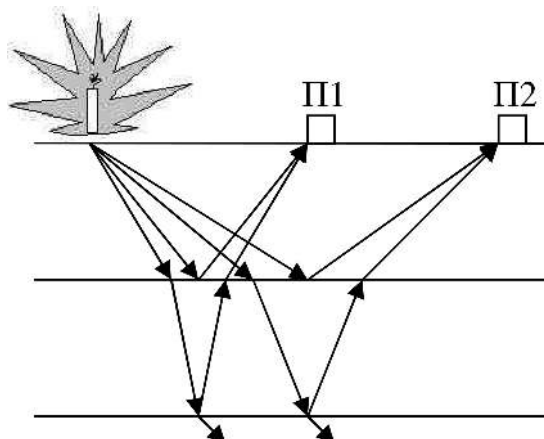


Сейсморазведка

Условие

Задача 3. «Сейсморазведка»

Для определения расположения полезных ископаемых в толще Земли используют метод сейсморазведки. Для этого в некотором месте на поверхности проводят взрыв – и от него во все стороны в толщу Земли распространяются звуковые волны. В каждой среде звуковые волны распространяются со своей скоростью v . Установленные на поверхности Земли звуковые приемники-микрофоны П1, П2 и т.д. принимают эхо, отраженное от границ слоев – осуществляют эхолокацию. При попадании на границу раздела двух сред происходит отражение звуковой волны, причем закон отражения звуковых волн аналогичен закону отражения света: угол падения равен углу отражения



$$\varphi_{\text{пад}} = \varphi_{\text{отр}}$$

При попадании на границу раздела двух сред, в первой из которых волна распространяется со скоростью v_1 , а во второй со скоростью v_2 , звуковая волна испытывает преломление, причем закон преломления звуковых волн аналогичен закону преломления света

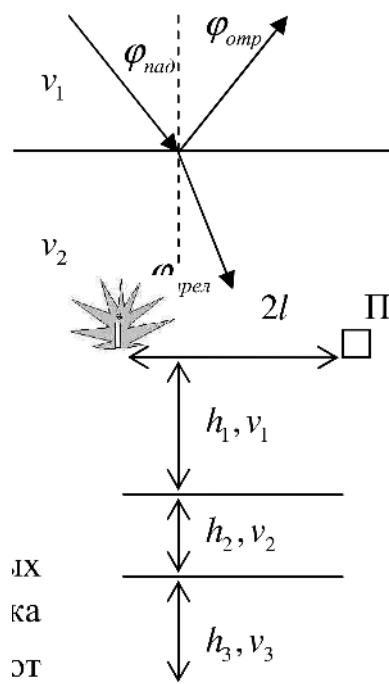
$$\frac{\sin \varphi_{\text{пад}}}{v_1} = \frac{\sin \varphi_{\text{прел}}}{v_2}.$$

Для малых углов падения закон преломления упрощается

$$\frac{\varphi_{\text{пад}}}{v_1} = \frac{\varphi_{\text{прел}}}{v_2}.$$

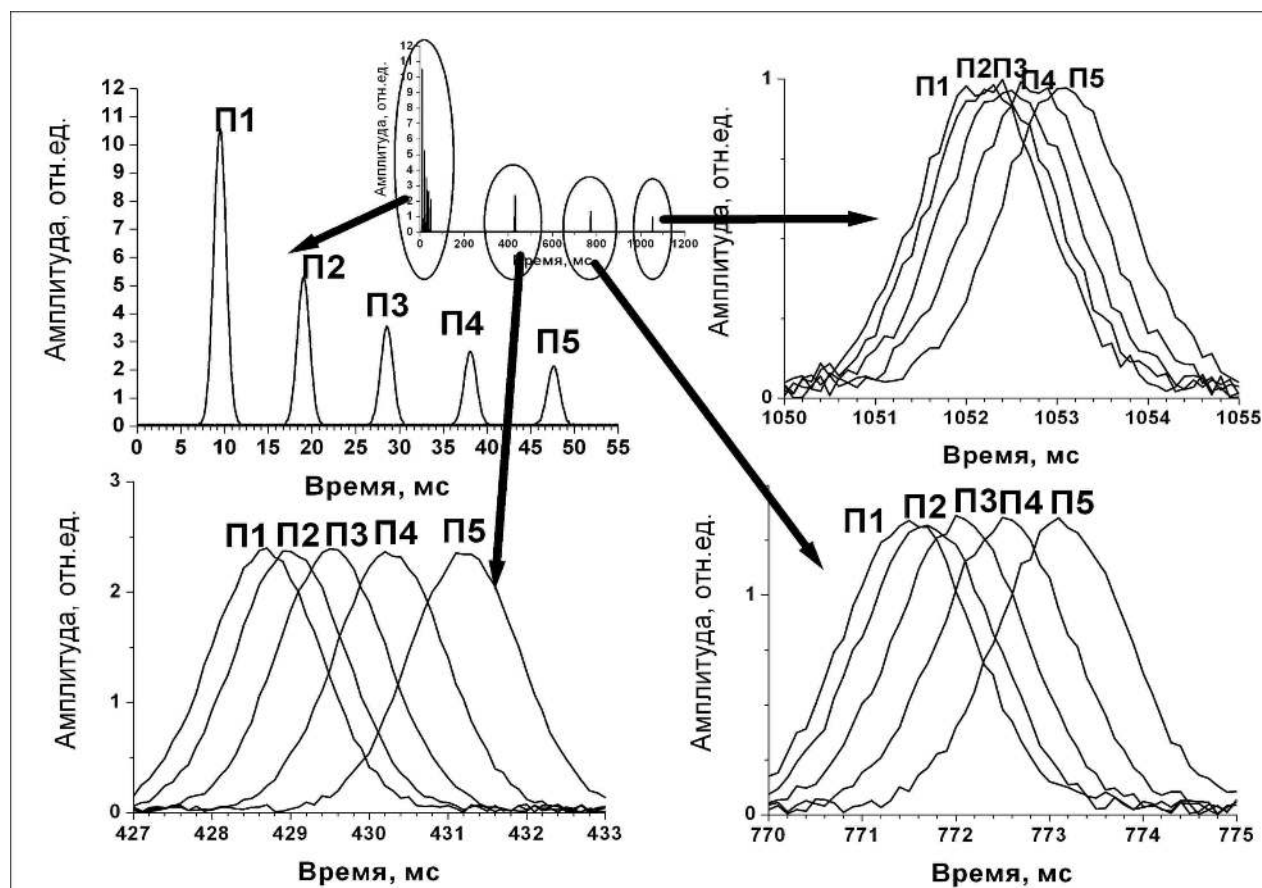
1. При помощи сейсморазведки исследуют недра Земли, в которых породы расположены в три слоя толщинами h_1, h_2, h_3 со скоростями звука v_1, v_2, v_3 соответственно. Динамит заложен на расстоянии $2l$ от приемника. Через какое время от начала взрыва к приемнику придет эхо от первой границы слоев, от второй границы, от третьей? Изобразите примерный график зависимости громкости звука I , регистрируемой микрофоном, от времени.

Считайте расстояние от места взрыва до акустического приемника много меньшим толщин слоев.



2. Для исследования недр Земли было установлено пять приемников П1,П2,П3,П4,П5 на расстояниях соответственно 40м, 80м, 120м, 160м, 200м от места взрыва. Зарегистрированные ими сигналы приведены на графике. Определите состав и толщины слоев земных недр. Скорость звука в различных породах приведена в таблице.

Вещество	Скорость звука, км/с
глина	3,5
гранит	5,4
железная руда	5,7
медная руда	4,7
мрамор	3,9
оловянная руда	3,3
песок	4,2



Примечание.

Примечание.

1. Очень удобно измерять углы не в градусах, а в радианах. Чтобы перевести угол из градусов в радианы, необходимо умножить его на 0,01745 — $\varphi(\text{рад}) = \varphi^\circ \cdot 0,01745$.

Для малых углов φ , измеренных в радианах, выполняются следующие соотношения

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

2. Для малых величин $\xi \ll 1$ справедливы следующие соотношения

$$\frac{1}{1+\xi} \approx 1 - \xi, \quad \sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{1}{2}\xi, \quad (1+\xi)^n \approx 1 + n\xi$$

Решение

1. Поскольку по условию толщины слоев намного больше, чем расстояние от места взрыва до приемника, то углы падения звуковых волн на границу раздела слоев можно считать малыми. Рассмотрим возможные пути распространения звука от места взрыва до приемника (см. рисунок): 0) Без отражений (вблизи земной поверхности). Время, за которое звук дойдет до приемника, равно

$$t_0 = \frac{2l}{v_1}. \quad (1)$$

1) Отражение от первой границы. Угол падения на границу φ_1 равен углу отражения. Путь, пройденный звуком, равен

$$s_1 = 2 \frac{h_1}{\cos \varphi_1} \approx 2 \frac{h_1}{1 - \frac{\varphi_1^2}{2}} \approx 2h_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right), \quad (2)$$

при этом сам угол падения

$$\varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{l}{h_1}, \quad (3)$$

откуда время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$t_1 = \frac{2h_1}{v_1} \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) \approx \frac{2h_1}{v_1} \left(1 - \frac{l^2}{h_1^2}\right) = \frac{2h_1}{v_1} - \frac{1}{h_1 v_1} l^2. \quad (4)$$

2) Отражение от второй границы. Угол падения φ_1^* связан с углом преломления φ_2^* законом преломления

$$\frac{\sin \varphi_1^*}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2^*}{v_2}, \quad (5)$$

который ввиду малости углов можно записать, как

$$\frac{\varphi_1^*}{v_1} = \frac{\varphi_2^*}{v_2}, \quad (6)$$

откуда

$$\varphi_2^* = \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^*. \quad (7)$$

Кроме того, горизонтальное смещение звукового луча до точки отражения равно l

$$l = h_1 \operatorname{tg} \varphi_1^* + h_2 \operatorname{tg} \varphi_2^* \approx h_1 \varphi_1^* + h_2 \varphi_2^*. \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим значения углов

$$l = h_1 \varphi_1^* + h_2 \varphi_2^* = h_1 \varphi_1^* + h_2 \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^* = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2}{v_1} \varphi_1^*, \quad (9)$$

$$\varphi_1^* = \frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2} l, \quad (10)$$

$$\varphi_2^* = \frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2} l. \quad (11)$$

Пусть луч прошел расстояние s_1^* в первой среде и s_2^* во второй. Эти расстояния можно выразить через толщины слоев h_1 и h_2 и углы φ_1^* и φ_2^* :

$$s_1^* = \frac{h_1}{\cos \varphi_1^*} \approx h_1 \left(1 + \frac{\varphi_1^{*2}}{2}\right), \quad (12)$$

$$s_2^* = \frac{h_2}{\cos \varphi_2^*} \approx h_2 \left(1 - \frac{\varphi_2^{*2}}{2}\right). \quad (13)$$

Время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{s_1^*}{v_1} + \frac{s_2^*}{v_2} = 2 \frac{h_1}{v_1} \left(1 + \frac{\varphi_1^{*2}}{2}\right) + 2 \frac{h_2}{v_2} \left(1 - \frac{\varphi_2^{*2}}{2}\right) = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{h_1}{v_1} \varphi_1^{*2} - \frac{h_2}{v_2} \varphi_2^{*2} = \\ &= 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{h_1}{v_1} \left(\frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2}\right)^2 l^2 + \frac{h_2}{v_2} \left(\frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2}\right)^2 l^2 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{1}{(h_1 v_1 + h_2 v_2)} l^2 \end{aligned} \quad (14)$$

3) Отражение от третьей границы. Угол падения $\varphi_1^\dagger$ связан с углом преломления $\varphi_2^\dagger$ и углом преломления $\varphi_3^\dagger$ законом преломления

$$\frac{\sin \varphi_1^\dagger}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2^\dagger}{v_2} = \frac{\sin \varphi_3^\dagger}{v_3}, \quad (15)$$

который ввиду малости углов можно записать, как

$$\frac{\varphi_1^\dagger}{v_1} = \frac{\varphi_2^\dagger}{v_2} = \frac{\varphi_3^\dagger}{v_3}, \quad (16)$$

откуда

$$\varphi_2^\dagger = \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^\dagger, \quad (17)$$

$$\varphi_3^\dagger = \frac{v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger. \quad (18)$$

Кроме того, горизонтальное смещение звукового луча до точки отражения равно l

$$l = h_1 \operatorname{tg} \varphi_1^\dagger + h_2 \operatorname{tg} \varphi_2^\dagger + h_3 \operatorname{tg} \varphi_3^\dagger \approx h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \varphi_2^\dagger + h_3 \varphi_3^\dagger. \quad (19)$$

Из (16), (17) и (18) находим значения углов

$$l = h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \varphi_2^\dagger = h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^\dagger + h_3 \frac{v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger, \quad (20)$$

$$\varphi_1^\dagger = \frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l, \quad (21)$$

$$\varphi_2^\dagger = \frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l, \quad (22)$$

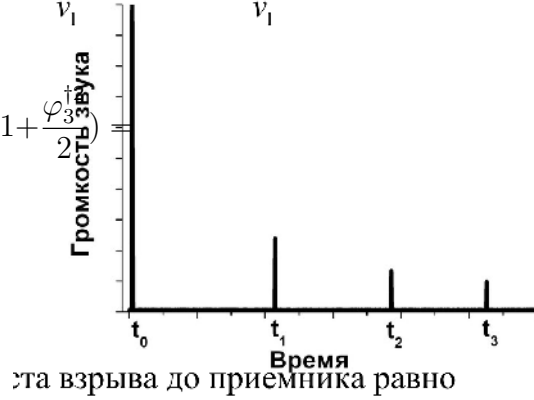
$$\varphi_3^\dagger = \frac{v_3}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l. \quad (23)$$

Время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$h_3 \frac{v_3}{v_1} \phi_1^* = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}{v_1} \phi_1^*, \quad (20)$$

$$t_3 = \frac{s_1^\dagger}{v_1} + \frac{s_2^\dagger}{v_2} + \frac{s_3^\dagger}{v_3} = 2 \frac{h_1}{v_1} \left(1 + \frac{\varphi_1^{\dagger 2}}{2}\right) + 2 \frac{h_2}{v_2} \left(1 + \frac{\varphi_2^{\dagger 2}}{2}\right) + 2 \frac{h_3}{v_3} \left(1 + \frac{\varphi_3^{\dagger 2}}{2}\right)$$

$$= 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} + \frac{h_3}{v_3} \right) + \frac{1}{(h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3)} l^2. \quad (24)$$



В моменты времени t_0, t_1, t_2, t_3 к приемнику приходят звуковые волны от взрыва и на графике зависимости регистрируемой приемником громкости звука от времени появляются максимумы. Поскольку, звуковая мощность при каждом отражении от границ слоев теряется, то амплитуда второго максимума будет меньше, чем первого и т.д. Примерный график зависимости громкости звука от времени представлен на рисунке.

2. Согласно формуле (4) время прихода сигналов к приемникам линейно зависят от l^2 .

$$t_1 = \frac{2h_1}{\nu_1} - \frac{1}{h_1 \nu_1} l^2.$$

Таким образом, график зависимости времени прихода звуковых волн от l^2 будет представлять собой прямую, точка пересечения с вертикальной осью которой даст значение

$$\tau_1 = 2 \frac{h_1}{\nu_1}, \quad (25)$$

а тангенс угла наклона

$$k_1 = \frac{1}{h_1 \nu_1}, \quad (26)$$

(те, кто знает метод наименьших квадратов, могут им воспользоваться).

Аналогично для зависимостей моментов времени t_2 и t_3 от l^2 :

$$\tau_2 = 2 \left(\frac{h_1}{\nu_1} + \frac{h_2}{\nu_2} \right), \quad (27)$$

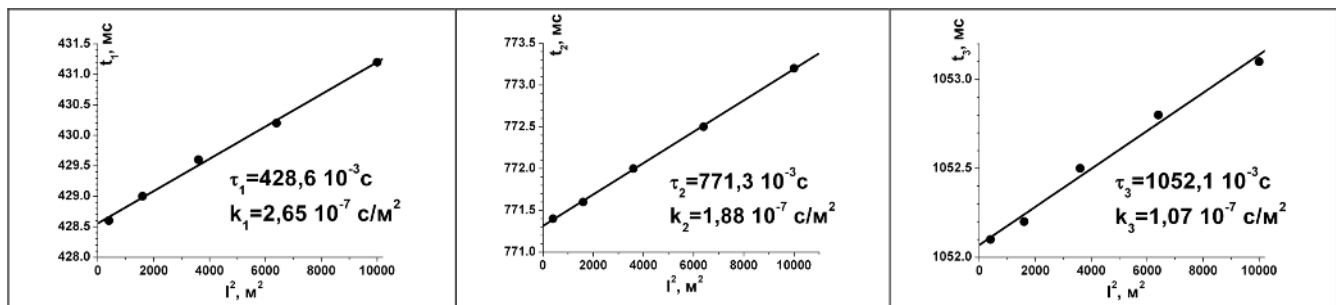
$$k_2 = \frac{1}{h_1 \nu_1 + h_2 \nu_2}, \quad (28)$$

$$\tau_3 = 2 \left(\frac{h_1}{\nu_1} + \frac{h_2}{\nu_2} + \frac{h_3}{\nu_3} \right), \quad (29)$$

$$k_3 = \frac{1}{h_1\nu_1 + h_2\nu_2 + h_3\nu_3}. \quad (30)$$

Значения времен прихода сигналов в зависимости от l^2 приведены в таблице и на графиках. Момент времени прихода сигнала находится по максимуму громкости.

$l, \text{ м}$	$l^2, \text{ м}^2$	$t_1, \text{ мс}$	$t_2, \text{ мс}$	$t_3, \text{ мс}$
20	400	428,6	771,4	1052,1
40	1600	429,0	771,6	1052,2
60	3600	429,6	772,0	1052,5
80	6400	430,2	772,5	1052,8
100	10000	431,2	773,2	1053,1



Значения параметров (31)

Значения параметров (31)

$$\tau_1 = 428,6 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad \tau_2 = 771,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad \tau_3 = 1052,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

$$k_1 = 2,65 \cdot 10^{-7} \text{ с/м}^2, \quad k_2 = 1,88 \cdot 10^{-7} \text{ с/м}^2, \quad k_3 = 1,07 \cdot 10^{-7} \text{ с/м}^2.$$

Значения толщин слоев и скоростей звука находятся из системы уравнений (25)-(30):

$$\frac{h_1}{\nu_1} = \frac{\tau_1}{2}, \quad (32)$$

$$\frac{h_2}{\nu_2} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}, \quad (33)$$

$$\frac{h_3}{\nu_3} = \frac{\tau_3 - \tau_2}{2}, \quad (34)$$

$$h_1\nu_1 = \frac{1}{k_1}, \quad (35)$$

$$h_2\nu_2 = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}, \quad (36)$$

$$h_3\nu_3 = \frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}. \quad (37)$$

Из (32)-(37) получаем

$$h_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{2k_1}} \approx 0,90\kappa M, \quad (38)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\tau_1 k_1}} \approx 4,2\kappa M/c, \quad (39)$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \approx 0,51\kappa M, \quad (40)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \approx 3,0\kappa M/c, \quad (41)$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_2}{2} \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right)} \approx 0,75\kappa M, \quad (42)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\tau_3 - \tau_2} \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right)} \approx 5,4\kappa M/c. \quad (43)$$

Толщины слоев и скорости звука в них определены неточно – случайные факторы вносят погрешность и на графиках громкости, регистрируемой приемником, присутствует шум. Вероятнее всего, земные породы расположены так: 1 – песок, 2 – глина, 3 – железная руда.