

Условие

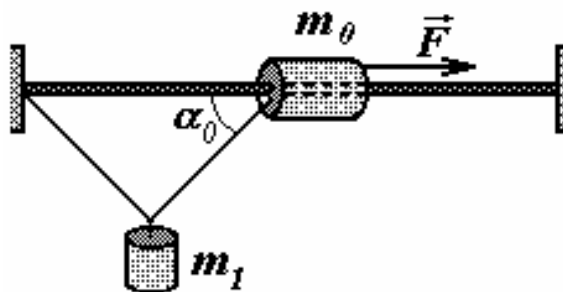
Задача 2. «Муфта»

На горизонтальный стержень насажена муфта массы $m_0 = 1,0$ кг, которая может скользить по стержню без трения. К муфте прикреплена легкая прочная нерастяжимая нить длины $L = 2,0$ м. Второй конец нити закреплен на конце стержня. К середине нити привязан груз массы $m_1 = 2,0$ кг.

А) Какую горизонтальную силу F следует приложить к муфте, чтобы удержать груз m_1 в равновесии, при котором нить образует угол $\alpha_0 = 45^\circ$ со стержнем?

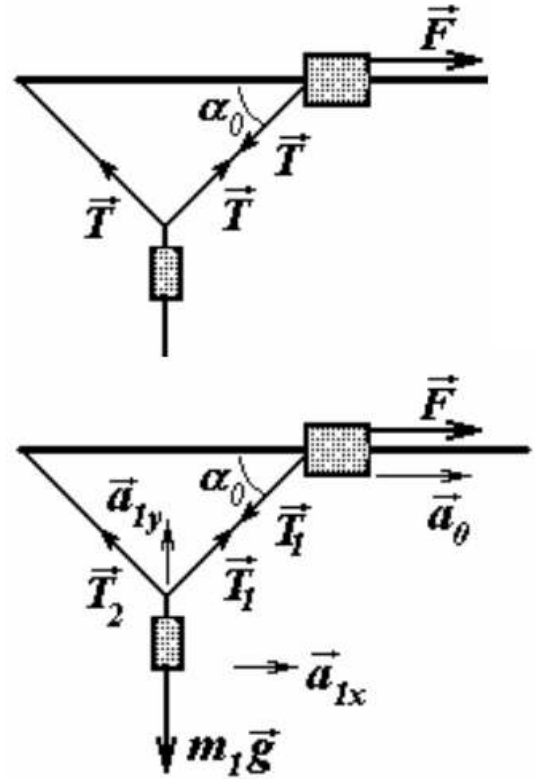
Б) Систему удерживают в равновесии, так, что нить образует угол $\alpha_0 = 45^\circ$ со стержнем. Силу, действующую на муфту, увеличили до $F = 50$ Н. С каким ускорением начнет двигаться муфта?

В) Систему удерживают в равновесии, так, что нить образует угол $\alpha_0 = 45^\circ$ со стержнем. Силу, действующую на муфту, увеличили до $F = 50$ Н. Чему будет равна скорость муфты момент, когда нить образует угол $\alpha_1 = 30^\circ$ со стержнем?



Решение

Задача 2. «Муфта»



А) В положении равновесия выполняются уравнения

$$m_1 g = 2T \sin \alpha_0, \quad F = T \cos \alpha_0,$$

из которых следует $F = \frac{m_1 g \cos \alpha_0}{2 \sin \alpha_0} \approx 10 \text{ Н}$.

Б) В начале движения распределение сил будет таким, как показано на рисунке. Заметим, что груз начнет смещаться как по горизонтали, так и по вертикали. Уравнения второго закона Ньютона для муфты и груза будут иметь вид

$$\begin{aligned} m_0 a_0 &= F - T_1 \cos \alpha_0 \\ m_1 a_{1x} &= (T_1 - T_2) \cos \alpha_0 \\ m_1 a_{1y} &= (T_1 + T_2) \sin \alpha_0 - m_1 g \end{aligned} \quad (1)$$

Легко заметить, что горизонтальная составляющая ускорения груза в два раза меньше ускорения муфты $a_{1x} = \frac{a_0}{2}$.

Для поиска связи между ускорением муфты и вертикальной составляющей ускорения груза рассмотрим малые смещения из положения равновесия муфты $\Delta x_0 = \frac{a_0 \tau^2}{2}$ и груза $\Delta y = \frac{a_{1y} \tau^2}{2}$ за малый промежуток времени τ . Учитывая неизменность длины нити, запишем на основании теоремы Пифагора

$$\left(\frac{2l \cos \alpha_0 + \frac{a_0 \tau^2}{2}}{2} \right)^2 + \left(l \sin \alpha_0 - \frac{a_{1y} \tau^2}{2} \right)^2 = l^2,$$

где обозначено l — длина половинки нити. Возводя в квадрат и пренебрегая малыми слагаемыми, пропорциональными τ^4 , получим

искоемое соотношение между ускорениями (с учетом $\alpha_0 = 45^\circ$) $a_{1y} = \frac{a_0 \cos \alpha_0}{2 \sin \alpha_0} = \frac{a_0}{2}$. Для упрощения расчетов сразу подставим $\cos \alpha_0 = \sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в уравнения

(1)

$$\begin{aligned} m_0 a_0 &= F - T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_1 \frac{a_0}{2} &= (T_1 - T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_1 \frac{a_0}{2} &= (T_1 + T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} - m_1 g \end{aligned}$$

Для решения этой системы уравнений проще всего удвоить первое уравнение и сложить его со вторым и третьим, в результате чего получим

$$(2m_0 + m_1) a_0 = 2F - m_1 g \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2F - m_1 g}{2m_0 + m_1} = 20 \frac{\text{н}}{\text{кг}}.$$

В) Для определения скорости муфты воспользуемся законом сохранения энергии

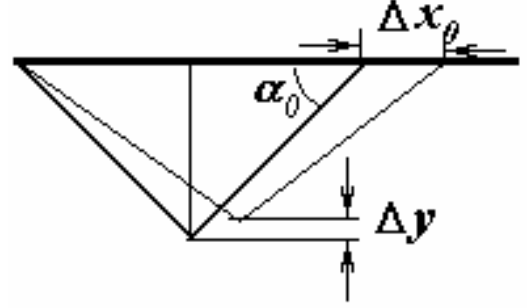
$$F x_0 = \frac{m_0 V_0^2}{2} + \frac{m_1 V_{1x}^2}{2} + \frac{m_1 V_{1y}^2}{2} + m_1 g y_1, \quad (2)$$

где $x_0 = L \cos \alpha_1 - L \cos \alpha_0$ - смещение муфты, $y_1 = \frac{L}{2} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1)$ - высота подъема груза. Горизонтальная составляющая скорости груза в два раза меньше скорости муфты $V_{1x} = \frac{V_0}{2}$. Связь между скоростью муфты и вертикальной составляющей скорости груза можно установить способом, аналогичным поиску соотношения между ускорениями,

$$\left(\frac{2l \cos \alpha_1 + V_0 \tau}{2} \right)^2 + (l \sin \alpha_1 - V_{1y} \tau)^2 = l^2.$$

Из этого уравнения следует $V_{1y} = \frac{V_0 \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha_1}$.

Подставляя полученные соотношения в уравнение (2) получим



$$F \frac{L}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) = \frac{m_0 V_0^2}{2} + \frac{m_1 V_0^2}{8} + \frac{m_1 V_0^2}{8} \left(\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \right)^2 + m_1 g \frac{L}{2} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1).$$

Из этого уравнения можно найти скорость муфты

$$V_0 = \sqrt{\frac{FL(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) - m_1 g L(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1)}{m_0 + \frac{m_1}{4 \sin^2 \alpha_1}}} \approx 2,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$