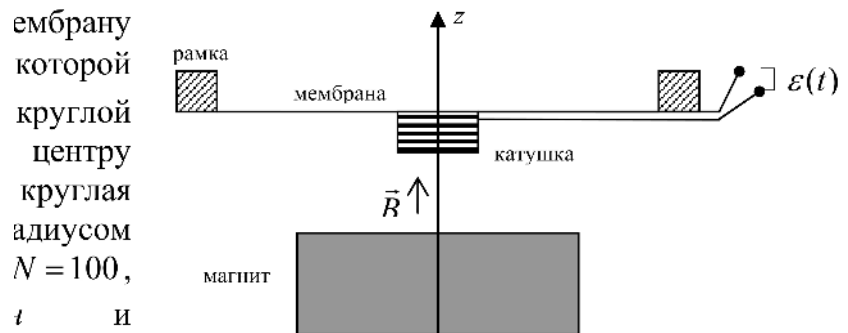


Условие

Задача 2 «Динамик»

В данной задаче Вам предстоит рассмотреть работу простейшего динамического громкоговорителя (проще говоря, динамика).

Динамик представляет собой тонкую круглую упругую мембрану радиусом $r_d = 10,0$ см, края которой жестко закреплены в круглой металлической рамке. К центру мембраны приклеена маленькая круглая проволочная катушка радиусом $r = 10,0$ мм, числом витков $N = 100$, индуктивностью $L = 1,0$ мкГн и сопротивлением $R = 4,0$ Ом. Масса катушки $m = 50,0$ г (масса мембраны гораздо меньше массы катушки). Катушка может совершать вместе с мембраной колебания в вертикальной плоскости, причем собственная частота колебаний (т.е. частота колебаний в вакууме) равна $f_0 = 30$ Гц. При колебаниях в



воздухе мембрана создает звуковые волны, при этом на нее действует сила сопротивления, пропорциональная мгновенной скорости движения катушки $F_{\text{сопр}} = -\beta v$. Коэффициент $\beta = \frac{2\gamma P_0 S}{c}$, где $\gamma = 7/5$ - показатель адиабаты, $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Па - атмосферное давление, $c = 333$ м/с - скорость звука в воздухе, S - площадь мембраны. Силы вязкого трения считайте пренебрежимо малыми.

Проволочная катушка находится в магнитном поле постоянного магнита, при этом ось катушки и ось симметрии магнитного поля совпадают. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля вблизи катушки равна $B_z = B_0(1 - \alpha z)$, причем коэффициенты $B_0 = 1,0$ Тл, $\alpha = 100$ м⁻¹, а координата z отсчитывается от положения равновесия катушки.

1. Через катушку протекает постоянный ток I . Найдите силу F_A , действующую на катушку со стороны магнитного поля.
2. К катушке приложили ЭДС, изменяющуюся по закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Найдите амплитуду установившихся колебаний катушки A . Изобразите примерный график зависимости $A(\omega)$. Определите амплитуду колебаний при частоте переменного напряжения $f = 30$ Гц и амплитуде $\varepsilon_0 = 1$ В.
3. К катушке приложили ЭДС, изменяющуюся по закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Найдите среднюю звуковую мощность $P_{\text{зв}}$, излучаемую динамиком. Определите максимальную звуковую мощность $P_{\text{зв max}}$, если амплитуда напряжения $\varepsilon_0 = 1$ В. На какой частоте она достигается? Оцените максимальный КПД η_{max} динамика. Определите рабочий диапазон динамика.

Изобразите примерный график зависимости звуковой мощности от частоты переменного напряжения $P_{\text{зв}}(\omega)$ (или $P_{\text{зв}}(f)$).

Примечания.

1. В данной задаче приняты следующие обозначения для частот: f - циклическая частота (измеряется в Гц), ω - угловая частота (измеряется в с^{-1}). $\omega = 2\pi f$
2. КПД динамика – отношение излучаемой звуковой мощности к потребляемой электрической мощности.
3. Рабочий диапазон динамика – интервал частот, на границах которого мощность в 2 раза меньше максимальной мощности.
4. Человеческое ухо способно воспринимать звук частотой от 20 Гц до 20000 Гц.

Решение

Задача 2 «Динамик»

1. Сила Ампера.

Очевидно, что если катушка с током находится в однородном вертикальном магнитном поле, то равнодействующая сил Ампера, действующих на разные части катушки, равна нулю.

Для возникновения ненулевой вертикальной составляющей силы Ампера необходимо, чтобы существовало

Определим радиальную составляющую магнитного поля. Выделим в пространстве воображаемый цилиндр, совпадающий с катушкой, высотой Δz и радиусом r . Полный магнитный поток через замкнутую поверхность цилиндра равен нулю

$$\Phi_B = 0.$$

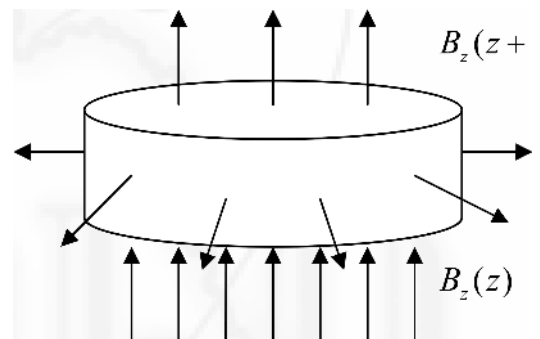
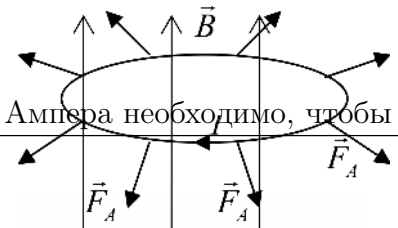
$$B_z(z + \Delta z)\pi r^2 + B_r 2\pi r \Delta z - B_z(z)\pi r^2 = 0$$

$$\text{Отсюда } B_r = \frac{B_z(z) - B_z(z + \Delta z)}{2\Delta z} r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}.$$

$$\boxed{B_r = \frac{\alpha B_0 r}{2}}$$

(2)

Тогда вертикальная составляющая силы Ампера, действующая на катушку, равна



$$F_A = 2\pi r N I B_r = 2\pi r N I \frac{\alpha B_0 r}{2} = \alpha B_0 \pi r^2 N I \quad (3)$$

Поскольку магнитное поле симметрично относительно оси Oz , равнодействующая горизонтальных составляющих силы равна нулю.

2. Амплитуда колебаний.

Переменное напряжение, поданное на клеммы катушки, вызовет переменный ток в катушке, на нее начнет действовать сила Ампера, и катушка придет в движение. Рассмотрим силы, действующие на катушку.

1) Если собственная частота колебаний системы равна ω_0 , то при отклонении катушки из положения равновесия на небольшое расстояние z , на нее будет действовать упругая возвращающая сила

$$F_{\text{упр}} = -kz = -m\omega_0^2 z.$$

Собственная частота колебаний для катушки равна $\omega_0 = 2\pi f_0 = 188 \text{ с}^{-1}$.

2) Как было сказано в условии, при движении мембраны вместе с катушкой, создаются звуковые волны, при этом на мембрану действует сила сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = -\beta v.$$

В данном случае коэффициент $\beta = \frac{2\gamma P_0 S}{c} = 26,4 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$.

3) И ещё на катушку будет действовать сила Ампера, направление которой зависит от способа намотки катушки и направления тока в ней. Для определенности будем считать, что при приложении положительного постоянного напряжения ток течет так, что сила Ампера направлена вверх.

$$F_A = \alpha B_0 \pi r^2 N I.$$

Для удобства обозначим постоянный множитель перед силой тока $g = \alpha B_0 \pi r^2 N$. В данном случае $g = 3,14 \text{ Н/А}$.

По второму закону Ньютона

$$ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{сопр}} + F_A \quad (4)$$

$$ma = -m\omega_0^2 z - \beta v + gI$$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI \quad (5)$$

(точками сверху обозначены соответствующие производные по времени).

Рассмотрим, как связаны между собой сила тока и прикладываемое к катушке напряжение.

1) Внешняя ЭДС, прикладываемая к катушке равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

2) Переменное напряжение вызывает переменный ток, и в катушке, обладающей индуктивностью L , возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{\text{си}} = -L \frac{dI}{dt}.$$

3) При движении катушки в магнитном поле, магнитный поток через нее изменяется, что приводит к возникновению ЭДС индукции

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} (N\pi r^2 B_0(1 - \alpha z)) = \alpha B_0 \pi r^2 N \frac{dz}{dt} = g\dot{z}$$

По закону Ома для полной цепи

$$RI = \varepsilon + \varepsilon_{\text{си}} + \varepsilon_{\text{инд}} \quad (6)$$

$$RI = -L \frac{dI}{dt} + g\dot{z} + \varepsilon$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + g\dot{z} \quad (7)$$

Итого, получилась система из двух связанных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon(t) + g\dot{z}$$

Нас интересует решение, которое установится, в конце концов, при периодической внешней ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Ясно, что когда собственные колебания затухнут, сила тока и координата будут изменяться по гармоническому закону с такой же частотой, но другой начальной фазой.

В принципе, можно точно решить это уравнение, подставив в систему дифференциальных уравнений

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi),$$

$$z = A \cos(\omega t + \psi),$$

потом, продифференцировав, разложив тригонометрические функции и приравняв коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, но это даст систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, решение которой весьма получится достаточно громоздким и отнимет много времени и сил. Но нетрудно заметить, что если ток изменяется по закону $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, то амплитуда слагаемого RI будет равна RI_0 , а амплитуда слагаемого $L\frac{dI}{dt}$ будет равна ωLI_0 . Даже на предельной для человеческого уха частоте $f = 20$ кГц величина $\omega L = 0,12$ Ом, тогда как

$R = 4,0 \text{ Ом} \pm 0,12 \text{ Ом}$. Поэтому слагаемым $L\frac{dI}{dt}$ можно пренебречь, и система уравнений превращается в

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = gI$$

$$I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

Подставив ток в первое уравнение, получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами – уравнение вынужденных колебаний с затуханием:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + m\omega_0^2 z = g \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$$

$$m\ddot{z} + \left(\beta - \frac{g^2}{R}\right)\dot{z} + m\omega_0^2 z = \frac{g}{R}\varepsilon_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{z} + \frac{1}{m} \left(\beta - \frac{g^2}{R}\right)\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{g\varepsilon_0}{mR} \cos \omega t$$

Для удобства обозначим $\chi = \frac{1}{m} \left(\beta - \frac{g^2}{R}\right)$, $D = \frac{g\varepsilon_0}{mR}$.

Значение коэффициента $\chi = 479 \text{ с}^{-1}$. Значение коэффициента $D = 15,7 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ при амплитуде внешнего напряжения $\varepsilon_0 = 1 \text{ В}$.

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\ddot{z} + \chi\dot{z} + \omega_0^2 z = D \cos \omega t \quad (8)$$

Нас интересует амплитуда напряжения. Решить это дифференциальное уравнение можно разными способами: подстановкой $z = A \cos(\omega t + \psi)$, методом векторных диаграмм или методом комплексных амплитуд – это дело вкуса. В результате получается

$$A(\omega) = \frac{D}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2}}. \quad (9)$$

Если подставить выражения для всех коэффициентов, то получится весьма громоздкое выражение

$$A(\omega) = \frac{\frac{\alpha B_0 \pi r^2 N \varepsilon_0}{mR}}{\left[(\omega^2 - (2\pi f_0)^2)^2 + \left(\frac{1}{m} \left(\frac{2\gamma P_0 S}{c} - \frac{(\alpha B_0 \pi r^2 N)^2}{R} \right) \omega \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (10)$$

поэтому допустимо оставить выражение для амплитуды в более простом виде (9), предварительно оценив все коэффициенты.

При вынужденных колебаниях с затуханием на некоторой частоте вблизи собственной наблюдается резонанс

(максимум амплитуды), который наступает при минимуме знаменателя.

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2 = \min$$

Иследуем выражение на экстремум стандартным способом.

$$\frac{d}{d\omega}[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2] = 0$$

$$2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega = 0$$

$$(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega = 0$$

Вторая производная исследуемой функции равна

$$\frac{d}{d\omega}[(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega] = 3\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2)$$

У этого уравнения 3 корня $\omega_1 = 0$ и $\omega_{2,3} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \chi^2/2}$, правда, отрицательный корень физического смысла в себе не несет.

При небольшом затухании ($\omega_0^2 > \chi^2/2$) в точке $\omega_1 = 0$ локальный максимум (соответственно, минимум амплитуды), ведь вторая производная меньше нуля, а в точке $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \chi^2/2}$ - локальный минимум (соответственно максимум амплитуды).

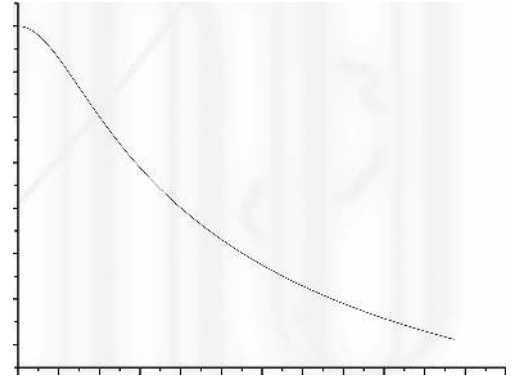
В случае же сильного затухания ($\omega_0^2 < \chi^2/2$) ситуация коренным образом меняется, поскольку уравнение $(\omega^2 - (\omega_0^2 - \chi^2/2))\omega = 0$ имеет только один действительный корень $\omega_1 = 0$, причем вторая производная в этой точке больше нуля, что означает минимум выражения и максимум амплитуды. Таким образом, при сильном затухании резонанса не наблюдается, и максимальная амплитуда соответствует нулевой частоте.

В нашем случае $\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$, а $\chi = 479\text{с}^{-1}$, соответственно мы имеем дело со случаем сильного затухания ($\omega_0^2 < \chi^2/2$), поэтому максимум амплитуды приходится на нулевую частоту и примерный график зависимости должен выглядеть так, как изображено на рисунке.

На частоте $f_0 = 30\text{Гц}$ ($\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$) амплитуда равна

$$A = D/(\chi\omega_0)$$

$$A = 1,74 \cdot 10^{-4}\text{м} = 0,174\text{мм} \quad (12)$$



3. Звуковая мощность.

Как было сказано в условии, в связи с генерацией звуковых волн на мембрану действует сила сопротивления $F_{\text{сопр}} = -\beta v$. Это значит, что мощность $P_{\text{зв}}^{\text{мгнов}} = \beta v v = \beta \dot{z}^2$ идет на создание звука. Таким образом, мгновенная звуковая мощность

$$P_{\text{зв}}^{\text{мгнов}} = \beta v^2 = \beta [-\omega A \sin(\omega t + \psi)]^2 = \frac{\beta \omega^2 D^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2} \sin^2(\omega t + \psi) \quad (13)$$

Это мгновенная мощность, но с практической точки зрения нас интересует средняя звуковая мощность, поэтому надо усреднить мгновенную мощность по периоду. Как известно, среднее значение $\sin^2(\omega t + \psi)$ по периоду равно $1/2$. Итого,

$$P_{\text{зв}}(\omega) = \frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2}. \quad (14)$$

Иследуем $P_{\text{зв}}(\omega)$ на максимум.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2} \right] &= \frac{2\omega((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2) - \omega^2(2(\omega^2 - \omega_0^2)2\omega + 2\chi^2\omega)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi \omega)^2]^2} = 0 \\ \omega[\omega^4 + \omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \chi^2\omega^2 - 2\omega^4 + 2\omega_0^2\omega^2 - \chi^2\omega^2] &= 0 \\ \omega(\omega_0^4 - \omega^4) &= 0 \\ \omega(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega_0^2 + \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

Физический смысл имеют решения $\omega_1 = 0$ (соответствует минимуму мощности) и $\omega = \omega_0$ (соответствует максимуму мощности). Итак, звуковая мощность максимальна на частоте

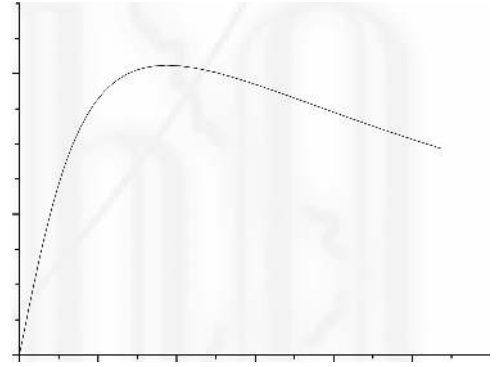
$$\omega = \omega_0 = 188\text{с}^{-1}, \quad (15)$$

при этом мощность равна

$$P_{\text{зв max}} = \frac{\beta D^2}{2\chi^2} = 0,0142\text{Вт}. \quad (16)$$

Потребляемая электрическая мощность $P_{\text{зп}} = \varepsilon(t)I(t) \cos \phi$, где ϕ - сдвиг фаз между током и напряжением. Сила тока $I = \frac{\varepsilon(t) + g\dot{z}}{R}$.

Оценим величину $g\dot{z} = -gA\omega \sin(\omega t + \psi)$. Пренебrecь ей можно, если амплитуда $g\omega A$ будет много меньше ε_0 . Как видно по графику, с ростом частоты ω амплитуда $A(\omega)$ убывает, причем при больших частотах обратно пропорционально квадрату частоты. При малых частотах ωA мало, при больших тоже мало, а в средних частотах имеет максимум. Выражение $g\omega A = \frac{Dg\omega}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2]^{1/2}}$ ведет себя так, как изображено на рисунке.



Для оценки можно воспользоваться рассчитанным в предыдущем пункте значением A на частоте $\omega_0 = 188\text{с}^{-1}$.

$$g\omega_0 A(\omega_0) = 0,103\text{В}$$

Поскольку в условии требуется не найти, а оценить величину КПД, можем пренебrecь величиной $g\omega_0 A(\omega_0) = 0,103\text{В}$ по сравнению с $\varepsilon_0 = 1\text{В}$, что приведет к тому, что значение КПД получится чуть завышенным.

Тогда потребляемая мгновенная мощность $P_{3\pi}^{МТНОВ} = \frac{\varepsilon_0^2 \cos^2(\omega t)}{R}$, а среднее значение потребляемой мощности

$$P_{3\pi} = \frac{\varepsilon_0^2}{2R}. \quad (17)$$

Потребляемая электрическая мощность равна $P_{3\pi} = 0,125\text{Вт}$.

Максимальный КПД равен

$$\eta_{\max} = P_{3\pi \max} / P_{3\pi} = 0,113 \quad (18)$$

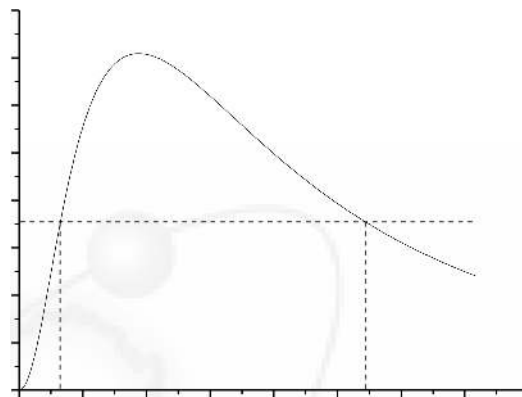
Для нахождения граничных частот рабочего диапазона надо решить уравнение

$$P_{3\pi}(\omega_{н,в}) = \frac{P_{3\pi \max}}{2} \quad (19)$$

$$\frac{\beta D^2}{2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\chi\omega)^2} = \frac{1}{2} \frac{\beta D^2}{2\chi^2}$$

$$\omega^4 - (2\omega_0^2 + \chi^2)\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$\omega_{в,н} = \sqrt{(\omega_0^2 + \chi^2/2) \pm \chi\sqrt{\omega_0^2 + \chi^2/4}} \quad (20)$$



Верхняя граничная частота равна

$$\omega_{\text{в}} = 544 \text{ с}^{-1} \text{ или } f_{\text{в}} = 86,6 \text{ Гц.} \quad (21\text{а})$$

Нижняя граничная частота равна

$$\omega_{\text{н}} = 65,0 \text{ с}^{-1} \text{ или } f_{\text{н}} = 10,3 \text{ Гц.} \quad (21\text{б})$$

График зависимости звуковой мощности от частоты переменного напряжения изображен на рисунке. Как видно, исследованный нами динамик хорошо подходит для воспроизведения низких частот (басов).

Зависимость звуковой мощности от частоты

(22)