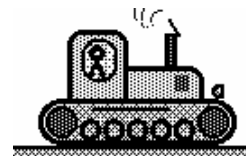


Условие

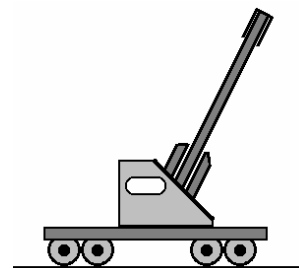
Задание 1. «Просто разминка»

Ускорение свободного падения на поверхности Земли считать равным $g = 10 \frac{м}{с^2}$.

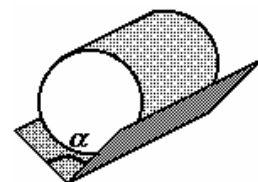


1.1 Верхняя часть гусеницы трактора движется относительно земли со скоростью $V_0 = 2,0 \frac{м}{с}$. С какой скоростью движется трактор?

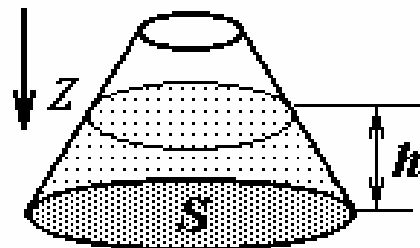
1.2 Ствол пушки, размещенной на железнодорожной платформе, расположен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Платформа может двигаться по горизонтальным рельсам. Начальная скорость вылета снаряда равна $V_0 = 400 \frac{м}{с}$. Чтобы увеличить дальность полета снаряда платформу разгоняют до скорости $v_1 = 72 \frac{км}{час}$. На сколько процентов увеличится дальность полета снаряда, выпущенного с движущейся платформы, по сравнению с дальностью полета снаряда, выпущенного с жестко закрепленной платформы? Масса платформы значительно больше массы снаряда. Военные действия происходят на Марсе, где можно пренебречь сопротивлением атмосферы.



1.3 Желоб изготовлен из двух широких одинаковых досок, образующих двугранный угол $\alpha = 60^\circ$. Желоб расположили так, что его ребро горизонтально, а стороны симметричны относительно вертикали. Внутри желоба положили цилиндр массой $m = 2,0$ кг. Коэффициент трения между стенками желоба и боковой поверхностью цилиндра равен $\mu = 0,30$. Какую минимальную горизонтально направленную силу необходимо приложить к цилиндру, чтобы он начал двигаться вдоль желоба, параллельно ребру?



1.4 В вертикальный сосуд, имеющий форму усеченного конуса, налита вода, масса которой равна $m = 1,0$ кг. Высота уровня воды в сосуде равна $h = 10$ см. Площадь дна сосуда равна $S = 200$ см². Чему равна суммарная сила давления воды на боковые стенки сосуда?



с радиусом желобка. Второму в направлении покоящегося собой абсолютно упруго. ния между шарами. жности удобно задавать с от начального положения

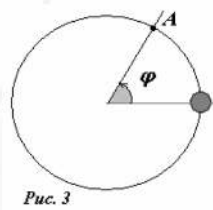
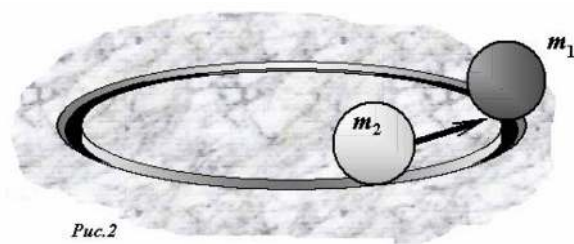


Рис. 3



1.5 На твердой горизонтальной поверхности сделан неглубокий круговой желобок, по которому, как по направляющим могут двигаться без трения два небольших шарика (Рис. 2). Масса первого шарика $m_1 = 20,0$ г, второго $m_2 = 30,0$ г. Радиусы шариков малы, по сравнению с радиусом желобка. Второму шарiku сообщают некоторую скорость в направлении покоящегося первого. Шары сталкиваются между собой абсолютно упруго. Укажите точку тринадцатого столкновения между шарами. *Указание. Положение точки на окружности удобно задавать с помощью угла φ , отсчитываемого от начального положения неподвижного шара (Рис.3)*

Решение

Задание 1. «Просто разминка»

1.1 Очевидно, что скорость трактора равна $V = \frac{V_0}{2} = 1,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.2 Дальность полета снаряда, выпущенного из неподвижного орудия, определяется формулой

$$S_0 = \frac{2V_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (1)$$

где V_0 - скорость снаряда относительно ствола. Чтобы достичь максимальной дальности, выстрел, очевидно, необходимо производить в направлении движения платформы. В этом случае к горизонтальной составляющей скорости снаряда относительно пушки добавится скорость движения платформы, поэтому закон движения снаряда будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= (V_0 \cos \alpha + v_1)t \\ y &= V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим время полета снаряда (из условия $y = 0$): $t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$ и подставим его в выражение для горизонтальной координаты для определения дальности полета

$$S_1 = (V_0 \cos \alpha + v_1) \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(1 + \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} \right).$$

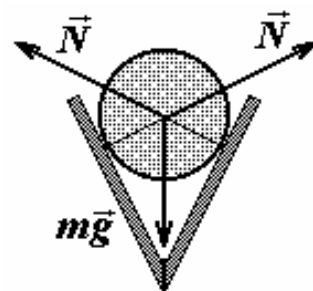
Таким образом, относительное увеличение дальности полета составит

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} = 10\%$$

При наличии понимания, решение может быть получено почти мгновенно: - так как время полета снаряда определяется только вертикальной составляющей скорости, то оно не зависит от скорости платформы; - дальность полета (при постоянном времени движения) пропорциональна горизонтальной составляющей скорости снаряда; *- следовательно, $\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{(V_0 \cos \alpha + v_1) - V_0 \cos \alpha}{V_0 \cos \alpha} = \frac{v_1}{V_0 \cos \alpha} = 10\%.$ *

1.3 Чтобы сдвинуть цилиндр, к нему необходимо приложить силу, превышающую силу трения.

Изобразим силы, действующие на цилиндр в проекции на вертикальную плоскость. Так как силы реакции направлены перпендикулярно поверхности, то тройка сил: две силы реакции и сила тяжести направлены под равными углами 120° друг к другу. Так проекция ускорения на вертикальную плоскость равна нулю, то сумма изображенных сил также равна нулю. Следовательно, модули этих сил равны, то есть $N = mg$. Таким образом, суммарная сила трения (и искомая сила) равна $F_{\text{тр}} = 2\mu N = 2\mu mg = 12\text{Н}$.



1.4 Суммарная сила давления воды на дно и стенки сосуда по модулю равна силе тяжести и направлена в противоположную сторону: $\rho ghS + F_{\text{ст.}} = mg$. Из этого уравнения находим $F_{\text{ст.}} = mg - \rho ghS \approx -10\text{Н}$, т.е. эта сила направлена вверх.

1.5 Обозначим начальную скорость второго шарика u_0 и найдем скорости шариков v_1 и v_2 после первого столкновения (Рис.1), используя уравнения законов сохранения импульса и механической энергии

$$m_2 u_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (1)$$

$$\frac{m_2 u_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (2)$$

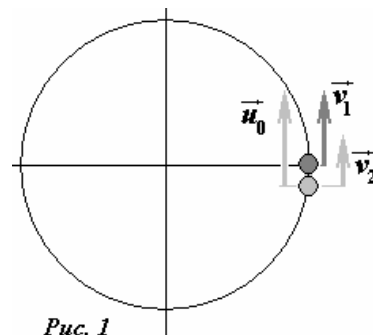


Рис. 1

Для быстрого решения этой системы уравнений перепишем ее в виде

$$m_2(u_0 - v_2) = m_1 v_1, \quad (3)$$

$$m_2(u_0^2 - v_2^2) = m_1 v_1^2. \quad (4)$$

и разделим второе уравнение на первое. При этом мы, конечно, теряем одно решение системы

$$v_2 = u_0, v_1 = 0, \quad (5)$$

но это решение соответствует начальным условиям – скоростям шарика до удара, а нам необходимо второе решение:

$$u_0 + v_2 = v_1.$$

Подстановка этого соотношения в уравнение (1) позволяет легко найти интересующее нас решение

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} u_0, \quad v_1 = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} u_0. \quad (6)$$

Понятно, что скорость первого шарика больше скорости второго, поэтому, совершив полный оборот, первый шарик догонит второй в некоторой точке A_1 , повернутой относительно исходной на некоторый угол φ (Рис. 1). Для определения этого угла заметим, что до второго удара первый шарик пройдет путь

$$S_1 = (2\pi + \varphi)R \quad (7)$$

за время

$$t_1 = \frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1}.$$

Аналогично, для второго шарика можно записать

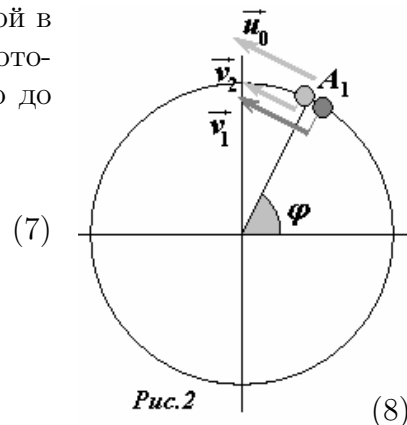
$$S_2 = \varphi R, \quad t_2 = \frac{\varphi R}{v_1}. \quad (9)$$

Приравнивая времена движения шариков, получим уравнение

$$\frac{(2\pi + \varphi)R}{v_1} = \frac{\varphi R}{v_2}. \quad (10)$$

из которого определим искомый угол φ , задающий положение точки столкновения

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1}. \quad (11)$$



Вычислим значение этого угла, используя выражения для скоростей (6)

$$\varphi = \frac{2\pi}{\frac{v_1}{v_2} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2m_2}{m_2 - m_1} - 1} = \frac{2\pi}{\frac{2 \cdot 30}{30 - 20} - 1} \approx \frac{2}{5}\pi. \quad (12)$$

Таким образом, мы определили точку второго столкновения. Для определения скоростей шариков после этого удара, следует составить систему уравнений, аналогичную (1)-(2). Однако подробно ее решать нет необходимости, так как ответ почти очевиден: если при начальных условиях (5) решением выражаются формулами (6), то теперь (6) являются начальными условиями, следовательно, решение выражается формулами (5). Иными словами, после второго удара шарики восстановят свои начальные скорости – второй будет двигаться со скоростью u_0 , а первый остановится! После второго удара второй шарик сделает полный оборот и столкнется с первым в той же точке A_1 . После этого повторится рассмотренная ситуация (только повернутая на угол φ): первый догоняет второй и т.д. Эти рассуждения позволяют указать точки всех столкновений шариков (Рис.3). Простым перечислением легко определить, что тринадцатое столкновение произойдет в точке, повернутой относительно исходного положения на угол, равный

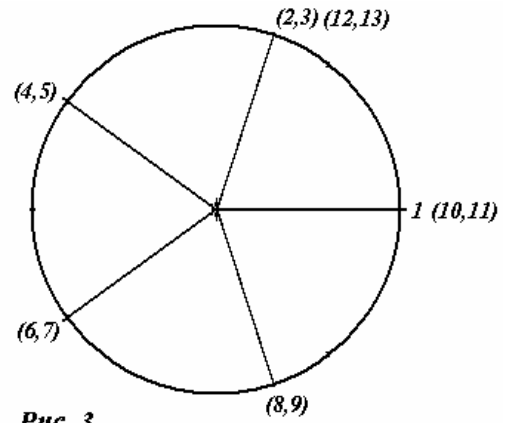


Рис. 3

$$\varphi_{13} = \frac{1}{5}\pi \approx 72^\circ.$$