

Условие

1. От трубки отрезали кусок длиной $l_0 = 20,0$ см (Рис. 1) и измерили его массу, которая оказалась равной $m = 1,50$ г. Определите поверхностную плотность материала трубки ρ .

Часть 2. Упругость, прочность и деформации.

Для описания растяжения пленки (Рис. 2) удобно использовать следующие характеристики:

Относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ - отношение удлинения Δl прямоугольного куска пленки к ее первоначальной длине l_0 ;

линейное напряжение $f = \frac{F}{a}$ - отношение силы F , равномерно приложенной к торцу прямоугольного куска пленки к ее ширине a . Аналогичная величина характеризует и возникающие при деформации силы упругости: отношение суммарной силы упругости к ширине полоски.

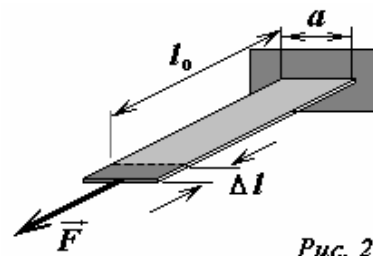


Рис. 2

⁴ Толщина стенок пренебрежимо мала по сравнению с радиусом трубки. ⁵ Не путать с обычной, «объемной» плотностью!

Для изучения упругих свойств полимера, отрезанный кусок трубки длиной $l_0 = 20,0$ см закрепили в вертикальном подвесе и к нижнему концу трубки стали подвешивать грузы известной массы m , измеряя при этом удлинение трубки Δl (Рис. 3). Результаты измерений представлены в **Таблице 1**.

При массе груза $m_{\max} = 600$ г удлинение трубки достигло максимального значения $\Delta l_{\max} = 8,0$ см, и трубка разорвалась.

2.1 Постройте график зависимости относительного удлинения трубки ε от линейного напряжения f ее стенок.

При малых деформациях справедлив закон Гука, который утверждает, что силы упругости пропорциональны деформации. В данном случае его представим в виде: линейное напряжение сил упругости пропорционально относительному удлинению

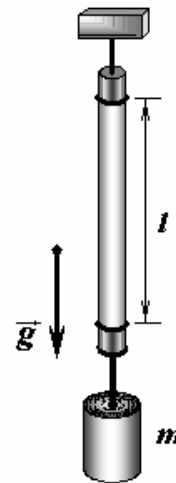


Рис. 3

$$f_{\text{упр.}} = \gamma \varepsilon, \quad (1)$$

где коэффициент пропорциональности γ называется модулем растяжения.

2.2 На основе экспериментальных данных обоснуйте справедливость закона Гука, определите модуль растяжения γ для исследуемой пленки. Оцените, при каких относительных деформациях погрешность приближенной формулы не превышает 5%.

Таблица 1. Зависимость удлинения трубки от массы подвешенного к ней груза.

m , г	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
Δl , мм	9,5	20,0	29,5	40,5	49,5	57,0	64,5	71,0	73,5	77,0	78,5

Ускорение свободного падения равно $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Часть 3. Давление.

В данной части задачи необходимо изучить деформации имеющихся трубок ($r_0 = 1,00$ см) при повышении давления газа внутри них. Обозначим ΔP - разность между *давлением газа внутри трубки и снаружи* (далее эту величину будем называть *избыточное давление*). Будем считать, что длина трубки достаточно велика, так что ее деформация сводится только к увеличению радиуса трубки, то есть деформированная трубка остается цилиндрической.

3.1 Покажите⁶, что избыточное давление внутри трубки ΔP , связано с линейным напряжением f стенок деформированной трубки уравнением

$$f = r\Delta P, \quad (2)$$

где r - радиус деформированной трубки.

3.2 Используя данные **Части 2**, определите при каком избыточном давлении ΔP_{max} трубка разорвется.

3.3 Постройте график зависимости радиуса трубки r от избыточного давления газа в ней ΔP во всем диапазоне возможных значений этого давления.

3.4. Предположим, что закон Гука (1) выполняется при любых деформациях полимера (с найденным ранее значением модуля растяжения γ).

⁶ 6

3.4.1 В рамках этого приближения найдите функциональную зависимость⁷ $r(\Delta P)$ радиуса трубки от избыточного давления внутри нее.

3.4.2 Укажите, при каких избыточных давлениях внутри можно пользоваться законом Гука.

3.4.3 Определите максимальное избыточное давление газа внутри трубки в приближении справедливости закона Гука.

3.5 При малых избыточных давлениях можно считать, что увеличение радиуса трубки пропорционально избыточному давлению газа внутри нее

$$\Delta r = C\Delta P, \quad (3)$$

где C – постоянный коэффициент.

3.5.1 Докажите справедливость формулы (3).

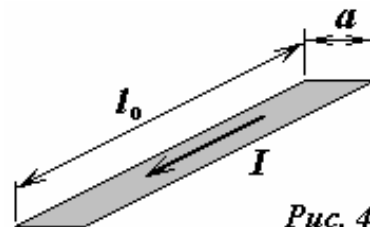
3.5.2 Найдите значение коэффициента C в формуле (3).

3.5.3 Укажите, при каких значениях избыточного давления ΔP , погрешность формулы (3) не превышает $\eta = 5\%$.

Часть 4. Электрические свойства.

*При протекании электрического тока параллельно одной из сторон (Рис. 4) прямоугольного куска пленки длиной l_0 (ширину куска обозначим a), ее электрическое сопротивление представим в виде

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{l_0}{a}, \quad (4)$$

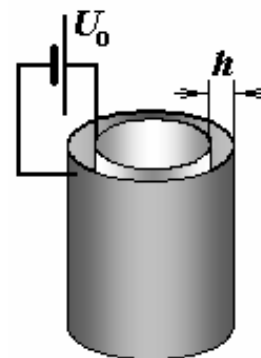


где λ - удельная линейная проводимость⁸ пленки.

Ток в пленке характеризуется поверхностной плотностью⁹ i , равной отношению силы тока к ширине полоски по которой он протекает, в данном случае $i = \frac{I}{a}$.

4.1 При пропускании электрического тока по изучаемой трубке (параллельно ее оси) оказалось, что при силе тока $I_0 = 2,00$ А напряжение между концами отрезка трубки длиной $l_0 = 20,0$ см равно $U_0 = 2,50 \cdot 10^{-3}$ В. Определите по этим данным удельную линейную проводимость материала трубки.

4.2. *Так как пленка оказалась гибкой и проводящей, то возникла идея использовать ее в качестве обкладки конденсатора, емкость которого зависит от напряжения. Идея этого «изобретения»: деформация пленки внутри конденсатора зависит от приложенного напряжения, при деформации изменяется зазор между обкладками, что приводит к изменению его емкости. Для реализации идеи изготовлен цилиндрический конденсатор (Рис. 5), внутренней обкладкой которого служит исследуемая полимерная трубка, а внешней – металлическая трубка, зазор между обкладками конденсатора при недеформированной полимерной трубке равен $h_0 = 1,00$ мм (можно считать значительно меньшим радиусов обкладок). Обкладки конденсатора подключают к источнику постоянного напряжения U_0 . Длина конденсатора достаточно велика, поэтому краевыми эффектами можно пренебречь. Электрическая постоянная равна $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.*



— ⁷ Получите формулу! ⁸ Не путать с обычной объемной проводимостью! ⁹ Сравните: плотность тока – сила тока пересекающего площадку единичной площади, здесь поверхностная плотность тока – сила тока, пересекающего отрезок единичной длины.

4.2.1 Найдите относительное увеличение радиуса полимерной трубки¹⁰ $x = \frac{\Delta r}{r_0}$, при напряжении источника $U_0 = 1,0$ кВ.

4.2.2 Найдите, максимальное напряжение которое, можно подавать на этот конденсатор, до его выхода из строя.

Часть 5. Магнитное воздействие.

Провалившаяся идея с конденсатором изменяющейся емкости, стимулировала дальнейшие поиски применения нового материала. Исследуемую трубку стали использовать в качестве внешней оболочки соленоида (Рис.6). Однослойная обмотка соленоида сделана из тонкого изолированного провода, располагается на непроводящем ферромагнитном сердечнике радиуса $a = 0,90$ см с магнитной проницаемостью $\mu = 1,00 \cdot 10^3$ (явлениями магнитного гистерезиса в нем при заданных значениях токов следует пренебречь), плотность намотки (число витков на единицу длины) равна $n = 100$ см⁻¹, ее длина $l = 20,0$ см (что, можно считать значительно больше радиуса соленоида). Внешняя трубка из исследуемого материала насаженная на обмотку при отсутствии тока в ней не деформирована. Соленоид подключен к источнику переменного электрического тока, частота которого равна $\nu = 50$ Гц, амплитудное значение ЭДС $U_0 = 36$ В, внутренним сопротивлением источника и активным сопротивлением обмотки можно пренебречь.

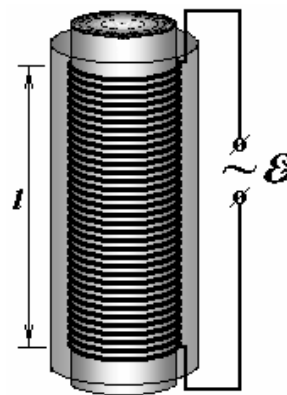


Рис. 6

5.1 Получите систему уравнений, описывающих законы изменения токов в обмотке соленоида I и линейную плотность тока в оболочке.

5.2 Найдите амплитудные значения силы тока в обмотке соленоида и линейной плотности тока в оболочке.

5.3 При протекании тока в обмотке оболочка нагревается. Найдите среднюю мощность теплоты, выделяющейся в оболочке, и среднюю мощность, потребляемую от источника.

5.4 Пренебрегая массой оболочки, оцените максимальное увеличение радиуса оболочки.

5.5 При протекании тока в соленоиде оболочка начинает вибрировать и издавать звук. При какой частоте тока в обмотке громкость этого звука будет максимальной (при неизменной амплитуде ЭДС источника тока)?

Часть 6. Сверхпроводимость.

Соленоид с исследуемой трубкой в качестве оболочки подключили к источнику постоянного тока. После того, как сила тока в обмотке соленоида достигла постоянного значения I_0 , оболочку охладили и перевели в сверхпроводящее состояние (считайте, что при этом ее упругие свойства не изменились). Затем, не отключая источника тока, соленоид осторожно вынули из трубки.

6.2 При каком начальном значении тока в обмотке соленоида I_0 в описанном эксперименте трубка разорвется после извлечения соленоида?

6.1 Найдите радиус трубки после того, как соленоид полностью достали из нее при силе тока в обмотке соленоида равной $I_0 = 0,10$ А.

¹⁰ Мы обозначили здесь его x , чтобы не путать с электрической постоянной.

Решение

1. Площадь поверхности отрезка трубки равна $S = 2\pi r_0 l_0$. По определению

$$\rho = \frac{m}{S} = \frac{m}{2\pi r_0 l_0} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 0,119 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}. \quad (1)$$

Часть 2. Упругость, прочность и деформации.

2.1 В данном эксперименте силы упругости направлены вдоль оси трубки, поэтому линейное напряжение сил упругости, возникающей в трубке равно

$$f = \frac{mg}{2\pi r_0}, \quad (2)$$

относительное удлинение материала трубки есть

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3)$$

По этим формулам необходимо рассчитать соответствующие значения по данным *Таблицы 1* условия задачи. Результаты расчетов приведены в таблице 1, на основании которой построен график требуемой зависимости (Рис. 1). На этом же графике нанесена точка разрыва.

Кривая на этом графике проведена «на глаз».

Таблица 1. Зависимость относительного удлинения от линейного напряжения.

$f, \frac{H}{M}$	78,1	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2	78,1	85,9
ε	0,048	0,100	0,148	0,202	0,247	0,285	0,322	0,355	0,368	0,385	0,392

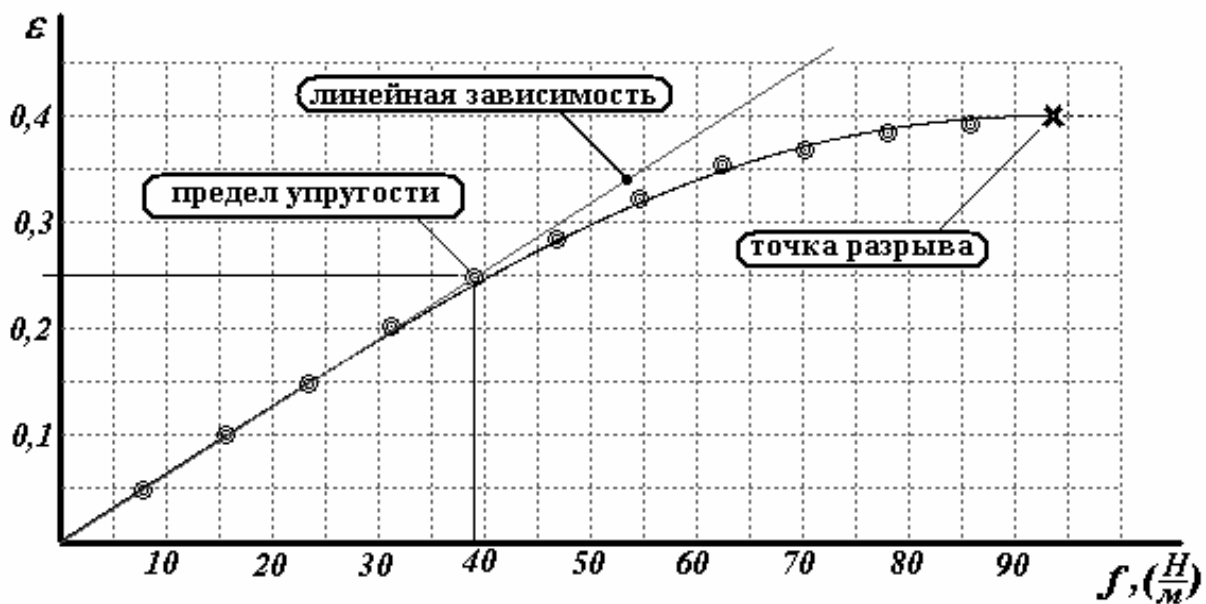


Рис. 1

2.2 По графику видно, что первые точки с хорошей точностью лежат на прямой, что подтверждает справедливость закона Гука в этом диапазоне.

Через эти точки и начало координат проведем прямую и определим коэффициент ее наклона $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f}$. Этот коэффициент можно определить:

- по одной точке (только какую выбрать?); - по нескольким начальным точкам (по 3-5), с последующим усреднением; - по графику линейной зависимости; - по методу наименьших квадратов (МНК) по первым 5 точкам (этот метод наиболее предпочтительный).

Расчет по МНК приводит к результату $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f} \approx 6,405 \cdot 10^{-3} \frac{\text{М}}{\text{Н}}$. Следовательно, значение модуля растяжения равно

$$\gamma = \left(\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f} \right)^{-1} \approx 1,56 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{М}} \approx 1,6 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{М}}. \quad (4)$$

*Не смотря на то, что в условии приведены данные с тремя значащими цифрами, имеющийся разброс экспериментальных данных не позволяет получить значение параметра γ с точностью большей двух значащих цифр.

С помощью графика определяем, что первый пять точек лежат близко к линейной зависимости (шестая и последующие точки закономерно отклоняются от нее), поэтому можно оценить границу применимости закона Гука как

$$\varepsilon < 0,25 \quad (5)$$

Часть 3. Давление.

При наличии избыточного давления газа внутри трубка последняя растягивается, увеличивается ее радиус и, следовательно, длина ее окружности. Сила давления газа $\vec{F}_д$ (Рис. 2), действующая на поверхность, направлена по нормали к поверхности, а возникающие силы упругости $\vec{F}_упр.$ направлены по касательной к поверхности трубки перпендикулярно ее оси (а не вдоль оси, как в предыдущей части задачи). Относительное удлинение периметра трубки $l = 2\pi r$ в этом случае равно относительному увеличению ее радиуса:

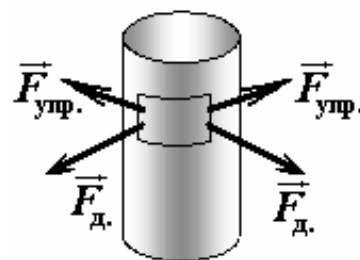


Рис. 2

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta r}{r_0}. \quad (6)$$

3.1 Мысленно выделим на деформированной трубке небольшое кольцо, высотой Δz (Рис. 3), а на нем малую площадку ΔS , видимую из центра под малым углом α . Площадь этой площадки равна $\Delta S = r\alpha\Delta z$. Так как площадка находится в равновесии, то сумма сил, действующих на нее, равна нулю. Сила давления газа направлена перпендикулярно выделенной площадке и равна $F_д = \Delta P \Delta S = r\alpha\Delta z \Delta P$. Силы упругости, действующие на боковые стороны выделенной площадки, направлены по касательной к боковой поверхности и равны по модулю $F_упр. = f\Delta z$, где f - линейное напряжение стенок.

Рис. 3

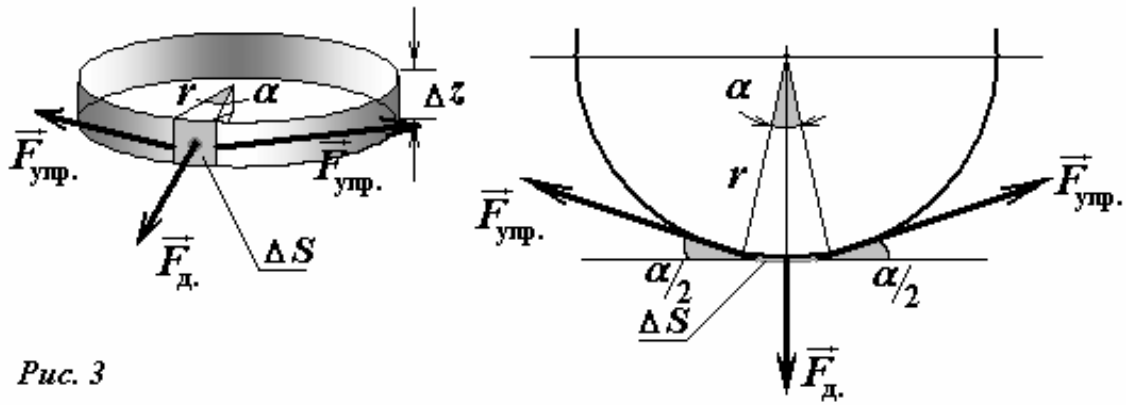


Рис. 3

Запишем условие равновесия выделенной площадки в проекции на нормаль

$$F_{\text{Д}} = 2F_{\text{упр.}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Подставим выражения для сил давления и упругости и считая угол α малым (при этом $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$) в это уравнение

$$r\alpha\Delta z\Delta P = 2f\Delta z\frac{\alpha}{2},$$

и после сокращения получаем требуемое уравнение (которое является основой дальнейшего решения):

$$r\Delta P = f \quad (7)$$

Возможны и другие варианты вывода этого уравнения. Например, можно рассмотреть условия равновесия половины кольца (Рис. 4). Тогда сумма сил давления $\Delta P\Delta z \cdot 2r$ уравнивается двумя силами упругости $F_{\text{упр.}} = f\Delta z$, что также приводит к уравнению (7). Рис. 4

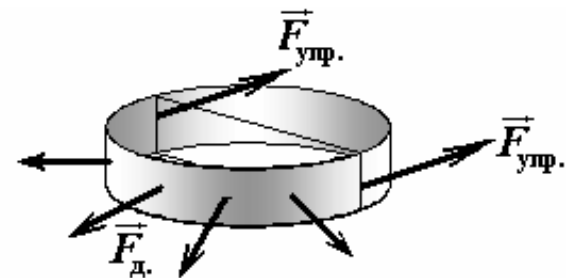


Рис. 4

Заметим, что в данном случае можно говорить о давлении сил упругости. Для этого следует выделить на боковой поверхности цилиндра небольшую площадку, найти векторную сумму тангенциальных сил упругости, (которая направлена перпендикулярно к поверхности) и разделить ее на площадь выделенной площадки. Как следует из приведенного решения это давление в данном случае равно $P_{\text{упр.}} = \frac{f}{r}$. **3.2** Из данных Части 2. определяем, что максимальное относительное удлинение пленки равно

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{\Delta l_{\text{max}}}{l_0} = \frac{8,00}{20,0} = 0,400, \quad (8)$$

а максимальное линейное напряжение

$$f_{\max} = \frac{m_{\max}g}{2\pi r_0} = \frac{600 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2\pi \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 93,7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (9)$$

Подставляя эти данные в уравнение (7), получим значение максимального давления, которое может выдержать трубка

$$\Delta P_{\max} = \frac{f_{\max}}{r_{\max}} = \frac{m_{\max}g}{2\pi r_0^2(1 + \varepsilon_{\max})} \approx 6,69 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad (10)$$

3.3 Для построения требуемой зависимости следует воспользоваться уравнением (7), в котором линейное напряжение является известной функцией от относительной деформации. Представим также радиус деформированной трубки через ее относительную деформацию $r = r_0(1 + \varepsilon)$. В результате получим уравнение

$$f(\varepsilon) = \Delta P r_0(1 + \varepsilon). \quad (11)$$

В этом уравнении функция $f(\varepsilon)$ задана в виде таблицы 1, или графика (Рис.1), аналитический вид этой зависимости неизвестен. Поэтому уравнение (11) не может быть решено относительно ε аналитически. Если нельзя найти зависимость $\varepsilon(\Delta P)$, то следует попытаться рассчитать обратную зависимость $\Delta P(\varepsilon)$, что можно сделать элементарно из уравнения (11)

$$\Delta P = \frac{f(\varepsilon)}{r_0(1 + \varepsilon)}. \quad (12)$$

с помощью данных таблицы 1. Используя эти данные, следует рассчитать радиус трубки $r = r_0(1 + \varepsilon)$ и по формуле (12) соответствующее давление. Результаты расчетов представлены в Таблице 2, по которым построен график (Рис. 5)

Таблица 2. Зависимость радиуса трубки от избыточного давления внутри нее.

$f, \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	78,1	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2	78,1	85,9
ε	0,048	0,100	0,148	0,202	0,247	0,285	0,322	0,355	0,368	0,385	0,392
$\Delta P, \text{кПа}$	0,74	1,412	2,04	2,59	3,13	3,64	4,13	4,61	5,13	5,63	6,16
$r \text{ см}$	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,29	1,32	1,36	1,37	1,39	1,39

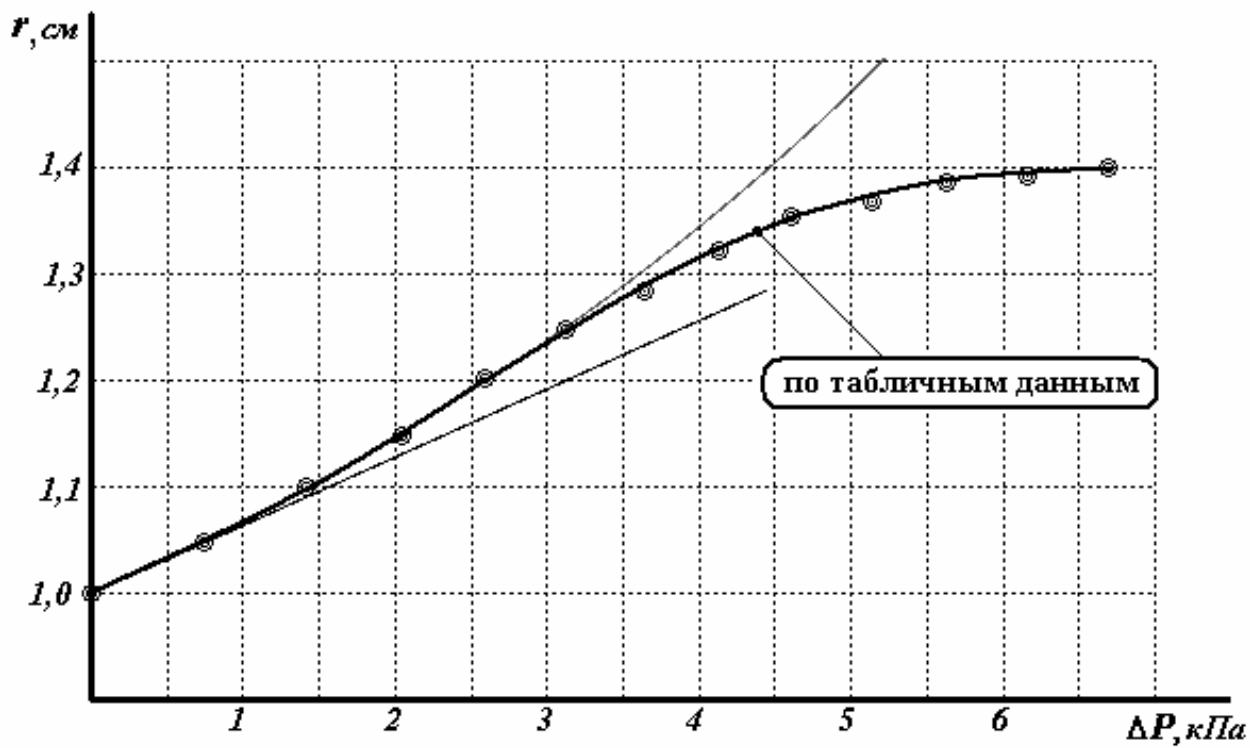


Рис. 5

Уравнение (12) также может быть решено графическим методом. Для этого представим его в виде

$$f(\varepsilon) = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon). \quad (12a)$$

График функции $f(\varepsilon)$ построен ранее, теперь на нем следует провести семейство прямых, описываемых функциями $y = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon)$. Ордината точки пересечения прямой $y = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon)$ с графиком функции $f(\varepsilon)$ даст решение уравнения (12a) при заданном значении ΔP . Построение указанных прямых очень просто: все они пересекают вертикальную ось при $\varepsilon = -1$, а горизонтальную при $f = r_0 \Delta P$. Указанное построение приведено на Рис. 6. Естественно, что полученное таким способом решение совпадает с построенным ранее.

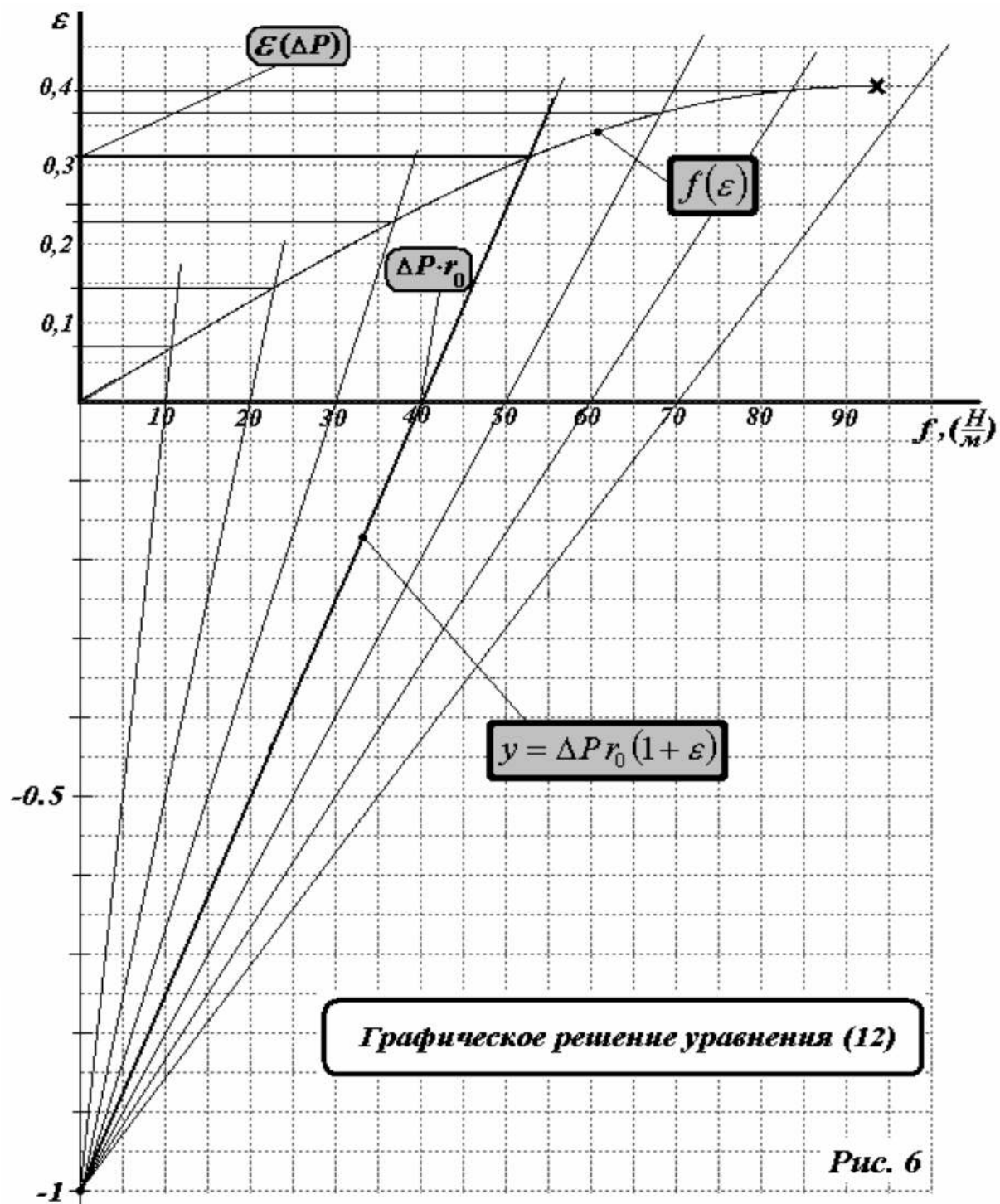


Рис. 6

3.4.1 В приближении закона Гука, в уравнение (7) необходимо подставить явное выражение для линейного напряжения $f = \gamma \varepsilon = \gamma \frac{r - r_0}{r_0}$:

$$\gamma \frac{r - r_0}{r_0} = \Delta P \cdot r.$$

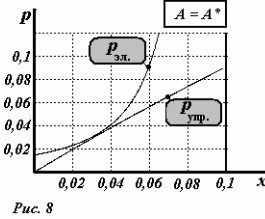
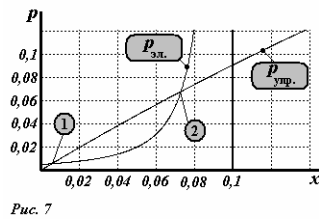
Из этого уравнения определяем требуемую зависимость

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{\gamma} \Delta P} \quad (13)$$

График этой функции показан на Рис. 5.

3.4.2 Ранее мы установили, что закон Гука справедлив при относительных деформациях меньших $\varepsilon < 0,25$. Эта деформация возникает при избыточном давлении $\Delta P \approx 3 \cdot 10^4$ Па, следовательно, приближением закона Гука и следующей из него формулой (13) можно пользоваться при

$$\Delta P \leq 3 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad (14)$$



*Из графика функции (13) на рис. 5, также следует, что это приближение достаточно точно описывает экспериментальные данные при $r \leq 1,25$, то есть при той же относительной деформации.

3.4.3 Значение радиуса трубки, рассчитанное по формуле (13), стремится к бесконечности, если знаменатель устремляется к нулю, что достигается при максимально возможном давлении, равном

$$(\Delta P)_{\max} = \frac{\gamma}{r_0} \approx \frac{1,56 \cdot 10^2 \frac{H}{M}}{1,00 \cdot 10^{-2} M} \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ Па} \quad (15)$$

$$(\Delta P)_{\max} = \frac{\gamma}{r_0} \approx \frac{1,56 \cdot 10^2 \frac{H}{M}}{1,00 \cdot 10^{-2} M} \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

Заметим, что это значение больше, рассчитанного ранее по табличным данным. Кроме того, в этом решении причина существования максимального давления иная – при возрастании радиуса трубки возрастающие силы упругости не в состоянии удержать быстрее возрастающие силы давления газа.

3.5.1 Считая избыточное давление малым, используем приближенную формулу для упрощения функции (13)

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{\gamma} \Delta P} \approx r_0 \left(1 + \frac{r_0}{\gamma} \Delta P + \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right)^2 \right).$$

Из этого выражения получим формулу для определения изменения радиуса трубки

$$\Delta r = r_0 \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P + \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right)^2 \right) = \frac{r_0^2}{\gamma} \Delta P \left(1 + \frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right). \quad (15)$$

Пренебрегая вторым слагаемым, получаем линейную зависимость между изменением радиуса и избыточным давлением

$$\Delta r = \frac{r_0^2}{\gamma} \Delta P \quad (16)$$

3.5.2 Значение коэффициента пропорциональности в этой формуле равно

$$C = \frac{r_0^2}{\gamma} \approx \frac{(1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2}{1,56 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}} \approx 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot \text{Па}^{-1} \quad (17)$$

График линейной функции (16) с найденным коэффициентом также показан на рис. 5.

3.5.3 Второе слагаемое в формуле (15), которое было опущено, может служить оценкой погрешности формулы (16). Таким образом, относительная погрешность η линейного приближения равна

$$\eta = \frac{r_0}{\gamma} \Delta P.$$

Следовательно, погрешность формулы (16) не будет превышать установленный предел при

$$\Delta P \leq \eta \frac{\gamma}{r_0} = 0,05 \frac{1,6 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ Па} \quad (18)$$

Часть 4. Электрические свойства пленки.

4.1 Используя приведенную формулу для сопротивления и закон Ома

$$U_0 = I_0 R = I_0 \frac{1}{\lambda} \frac{l_0}{2\pi r_0},$$

получим значение удельного сопротивления пленки

$$\lambda = \frac{I_0 l_0}{2\pi r_0 U_0} = \frac{2,00 \text{ А} \cdot 0,200 \text{ м}}{2\pi \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ В}} \approx 2,55 \cdot 10^3 \text{ Ом}^{-1} \quad (19)$$

4.2 Пусть поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора равна σ . Тогда напряженность электрического поля в конденсаторе равна $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, причем напряженность поля, создаваемого только одной обкладкой, в два раза меньше $E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Следовательно, сила, действующая на единицу площади обкладки (т.е. давление электрического поля) равна

$$P_{\text{эл.}} = \sigma E' = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (20)$$

и совпадает с объемной плотностью энергии поля.

4.2.1 Для дальнейшего решения задачи можно воспользоваться уравнением (7), в котором роль избыточного давления будет играть сила давления электрического поля.

Заметим, что электрические силы, действуя снаружи от трубки, но стремятся ее растянуть, как избыточное давление газа внутри нее, поэтому указанная замена допустима.

Далее, обратим внимание, что максимально возможная деформация трубки (ограниченная внешним металлическим цилиндром) составляет 10%, поэтому для вычисления линейного механического напряжения стенок трубки можно пользоваться законом Гука.

Так как конденсатор подключен к источнику, то напряжение на обкладках остается постоянным при изменении расстояния между трубками. Выразим напряженность электрического поля внутри конденсатора через напряжение источника

$$E = \frac{U_0}{R - r} = \frac{U_0}{R - (r_0 + \Delta r)} = \frac{U_0}{h - \Delta r}, \quad (21)$$

(здесь R - внутренний радиус металлической трубки). Таким образом, давление поля выражается формулой

$$P_{\text{эл.}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - \Delta r} \right)^2. \quad (22)$$

Наконец, запишем уравнение, связывающее увеличение радиуса трубки с приложенным напряжением (которое будет являться основой дальнейшего решения):

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - \Delta r} \right)^2 = \gamma \frac{\Delta r}{r_0} \frac{1}{r_0 + \Delta r}. \quad (22)$$

В этом уравнении слева стоит давление электрического поля, справа — уравновешивающее его давление сил упругости. Уравнение (22) можно привести к алгебраическому уравнению третьей степени, поэтому сначала необходимо проанализировать его решение, а затем провести возможные упрощения (основанные на разумных и обоснованных приближениях). Для этого выразим увеличение радиуса трубки через относительную деформацию $\Delta r = r_0 x$ и подставим в уравнение (22)

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - r_0 x} \right)^2 = \gamma \frac{r_0 x}{r_0} \frac{1}{r_0 + r_0 x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon_0 U_0^2 r_0}{2h^2 \gamma} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{h} x\right)^2} = \frac{x}{1 + x}$$

Обозначим безразмерные величины, рассчитаем их численные значения (все величины представлены в системе СИ)

$$A_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 r_0}{2h^2 \gamma} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (1,0 \cdot 10^3)^2 (1,0 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1,56 \cdot 10^2} \approx 2,84 \cdot 10^{-4},$$

$$\beta = \frac{r_0}{h} \approx 10,$$

и получим «безразмерное» уравнение

$$\frac{A_0}{(1 - \beta x)^2} = \frac{x}{1 + x}. \quad (23)$$

В этом уравнении A_0 является малой величиной, поэтому и его решение x также мало, поэтому попытаемся пренебречь малыми величинами x и βx в знаменателях этого уравнения. Тогда решение этого уравнения

$$x \approx A_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 r_0}{2h^2 \gamma} \approx 2,84 \cdot 10^{-4} \quad (24)$$

Малость полученного значения полностью оправдывает сделанное приближение.

К этому же решению можно подойти другими способами. Так, сразу рассчитав давление электрического поля при отсутствии деформации,

$$P_{\text{эл.}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (1,0 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2} \approx 4,4 \text{ Па},$$

видим, что оно крайне мало (ранее были тысячи паскалей), поэтому и деформация будет малой.

Следовательно, при расчете электрического взаимодействия и сил упругости им можно пренебречь и записать уравнение (22) в виде

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 = \gamma \frac{\Delta r}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0}, \quad (22a)$$

из которого сразу следует (24).

4.2.2 Причиной возможного выхода конденсатора из строя может служить короткое замыкание, которой произойдет, если растягивающаяся трубка прикоснется к внешнему цилиндру, то есть когда относительная деформация станет равной $x = \frac{h}{r_0} \approx 0,10$.

Непосредственная подстановка этого значения в уравнение (23) невозможно, так при этом знаменатель обращается в нуль. Для анализа поведения полимерной трубки при увеличении напряжения построим примерные графики зависимостей электрического и упругого давлений от относительной деформации в интересующем диапазоне $0 \leq x \leq \frac{1}{\beta} = 0,10$. Это проще сделать для «безразмерных» функций (Рис. 7):

$$p_{\text{эл.}} = \frac{A}{(1 - \beta x)^2}; \quad p_{\text{упр.}} = \frac{x}{1 + x}. \quad (25)$$

Введенный здесь параметр $A = \frac{\varepsilon_0 U^2 r_0}{2h^2 \gamma}$ зависит от приложенного к конденсатору напряжения U .

Рис. 7 Рис. 8

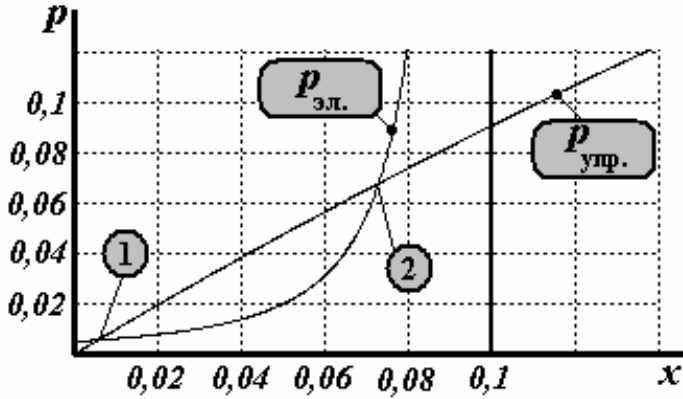


Рис. 7

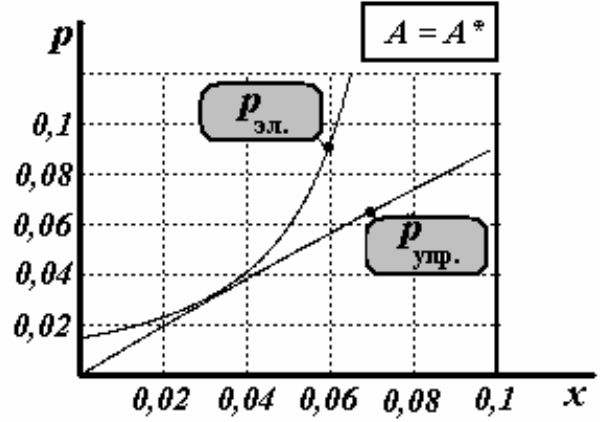


Рис. 8

При малых значениях параметра A в интересующем нас интервале $0 < x < 0,1$ эти графики имеют две точки пересечения, следовательно, уравнение (23) имеет два корня! Легко показать, что первый (найденный нами) соответствует устойчивому положению трубки, второй — неустойчивому. Ясно, что при увеличении напряжения от нуля будет реализовываться именно первое, устойчивое положение равновесия (так оно ближе к нулю). С ростом напряжения источника (и соответствующего возрастания параметра A) кривая зависимости электрического давления будет приподниматься и, наконец, при некотором критическом значении A^* эти кривые будут иметь единственную общую точку, точку касания. Именно при этом условии конденсатор потеряет устойчивость. Критическое значение A^* может быть найдено различными способами. Рассмотрим самый простой (по нашему мнению) из них. Заметим, что в рассматриваемом диапазоне кривую упругого давления с высокой точностью можно заменить на прямую $p_{\text{упр.}} = \frac{x}{1+x} \approx x$.

С учетом этого, перепишем уравнение (23) в виде

$$A = x(1 - \beta x)^2. \quad (26)$$

Понятно, что это равносильное (23) уравнение не будет иметь корней, если значение параметра A превышает максимум функции $y = x(1 - \beta x)^2$. Производная этой функции

$$y' = (1 - \beta x)^2 - 2\beta x(1 - \beta x) = (1 - \beta x)(1 - 3\beta x)$$

обращается в нуль при $\beta x^* = \frac{1}{3}$, (значению $\beta x^* = 1$ соответствует точка разрыва функции). Таким образом, максимальное значение этой функции и критическое значение параметра найдем, подставив это значение в формулу (26)

$$A^* = \frac{1}{3\beta} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4h}{27r_0}.$$

Используя выражение для введенного параметра, получаем $\frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} = \frac{4h}{27r_0}$, откуда следует, что критическое напряжение равно

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{8h^3\gamma}{27r_0^2\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{8(1,0 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 1,56 \cdot 10^2}{27(1,0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} \approx 7,2 \cdot 10^3 \text{ В} \quad (26)$$

*Обратите внимание, при напряжении в 1 кВ деформация трубки фактически пренебрежимо мала, а при напряжении 7 кВ – в конденсатор происходит короткое замыкание. Надо признать – не очень надежное устройство изобретено.

Для окончательного подтверждения точности полученного решения построим график функции* (26) Рис.8 – сплошная линия. Пунктиром построена точная функция $A = (1 - \beta x)^2 \frac{x}{1+x}$ (без сделанного приближения об упругом давлении).*

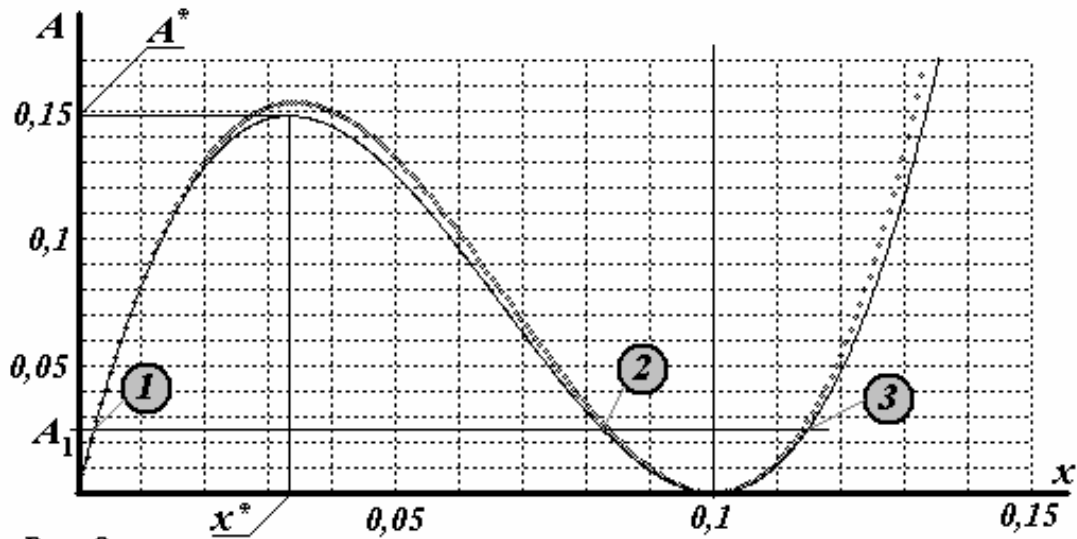


Рис. 9

Видно, что эти функции различаются незначительно. Так, в районе найденного максимума различия в этих функциях оценим из разложения

$$A = (1 - \beta x)^2 \frac{x}{1+x} \approx x(1 - \beta x)^2 \cdot (1 - x),$$

из которого следует, что относительная ошибка нашего приближения составляет величину $\frac{\delta A^*}{A^*} \approx x = \frac{4}{27\beta} \approx 0,015$ (всего полтора процента), что приводит к ошибке в определении

максимально напряжения (с учетом $U \sim \sqrt{A^*}$) в два раза меньшей, то есть порядка 0,8%. Такая точность не обеспечивается точностью исходных данных, поэтому является излишней. Обратите внимание, что при малых x график этой функции линеен, что подтверждает допустимость сделанных приближений при определении деформации по формуле (24).

Отметим, что с помощью графика на Рис.8 можно решать и исходное уравнение (23). Его корням соответствуют точки пересечения графика этой функции с горизонтальной прямой (для наглядности значение параметра A завышено по сравнению с решением в предыдущем разделе задачи). Кроме того, видно, что это уравнение имеет целых три корня, как и положено уравнению третьей степени! Причины появления этого корня установите самостоятельно, нас же он не интересует, так как всегда выходит за пределы интересующего нас интервала.

Часть 5. Магнитное воздействие.

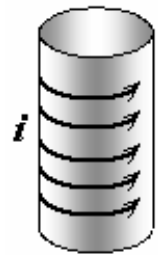


Рис. 10

5.1 При протекании переменного электрического тока по обмотке соленоида, внутри него возникает переменное магнитное поле, которое индуцирует ЭДС как в обмотке соленоида (самоиндукция), так и в проводящей полимерной оболочке. Индуцированный в оболочке электрический ток – круговой и протекает по ее поверхности перпендикулярно оси (Рис. 10). Этот ток будет оказывать аналогичное обратное влияние на ток в обмотке. Так как внутри системы имеется сердечник с большой магнитной проницаемостью, то магнитным потоком в узком пространстве между обмоткой и оболочкой можно пренебречь.

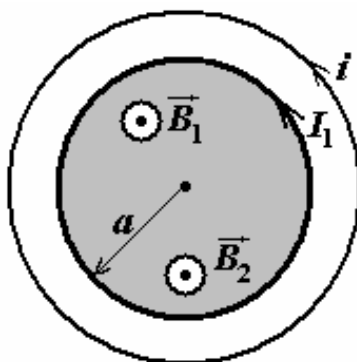


Рис. 11

Индукция магнитного поля в сердечнике B_1 , создаваемого током в обмотке I_1 , рассчитывается по известной формуле

$$B_1 = \mu\mu_0 n I_1. \quad (27)$$

Заметим, что произведение $nI = i$ представляет собой поверхностную плотность тока в обмотке, поэтому эта же формула справедлива и для расчета индукции поля, создаваемого током в оболочке

$$B_2 = \mu\mu_0 i. \quad (28)$$

Положительным направлением токов будем считать направление «против часовой стрелки» (Рис. 11), тогда положительное направление вектора индукции определяется по правилу буравчика.

На рисунке указаны положительные направления токов и векторов индукции, хотя реально направления токов в обмотке и оболочке противоположны, их «правильные» направления автоматически появятся при правильной записи уравнений, описывающих эти токи.

Магнитный поток через поперечное сечение рассматриваемой системы запишем в виде

$$\Phi = \pi a^2 (B_1 + B_2) = \pi a^2 \mu \mu_0 (nI_1 + i). \quad (29)$$

Преобразуем это выражение, для чего заметим, что величина

$$\pi a^2 \mu \mu_0 n N = L \quad (30)$$

(где $N = nl$ - число витков обмотки) является индуктивностью соленоида (в отсутствии оболочки), так как она может быть представлена в виде $L = \frac{N\Phi_1}{I_1}$, Φ_1 - поток через один виток магнитного поля, создаваемого током I_1 в обмотке. Электрический ток в полимерной оболочке равномерно распределен по ее поверхности. Поэтому можно

записать выражение для суммарного тока $I_2 = il$, текущего по оболочке. Второе слагаемое в этом случае имеет вид

$$\pi a^2 \mu \mu_0 i = \pi a^2 \mu \mu_0 \frac{I_2}{l} = \pi a^2 \mu \mu_0 \frac{nN}{nNl} I_2 = \frac{L}{N^2} I_2 \quad (31)$$

Окончательно, магнитный поток записывается в виде

$$\Phi = \frac{L}{N} I_1 + \frac{L}{N^2} I_2. \quad (32)$$

Возникающая при изменении магнитного потока ЭДС индукции одинакова в одном витке обмотки и оболочке и равна

$$E_{ind} = -\Phi' \quad (33)$$

Так как активным сопротивлением контура, состоящим из источника и обмоткой соленоида можно пренебречь, то для него сумма ЭДС источника и индукции во всех витках соленоидов равна нулю, поэтому

$$E_{ист.} - N\Phi' = 0. \quad (34)$$

Запишем уравнение суммарного тока $I_2 = il$, текущего по оболочке. Общее сопротивление оболочки при указанном протекании тока равно (по сравнению с предыдущим продольным протеканием, «длина» и «ширина» поменялись местами):

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{l}. \quad (35)$$

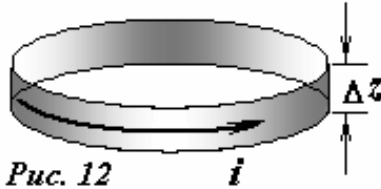
Предположим пока, что сопротивление кольца не зависит от его деформации. Для суммарного тока справедлив закон Ома для полной цепи $I_2 R = E_{ind}$, или

$$I_2 R = -\Phi' \quad (36)$$

Уравнения (34) и (36) образуют систему, описывающую изменения токов в обмотке и оболочке. Подставив в нее выражение для потока, получим эту систему в явном виде

$$\begin{cases} E_{\text{ист.}} - L \left(I_1 + \frac{1}{N} I_2 \right)' = 0 \\ I_2 R = -\frac{L}{N} \left(I_1 + \frac{1}{N} I_2 \right)' \end{cases} \quad (37)$$

1. Без введения обозначений для индуктивности и сопротивления оболочки эта же система будет выглядеть более громоздко.



Выделим тонкое кольцо толщиной Δz (Рис. 12). Сила тока, протекающая по этому кольцу равна $\delta I_2 = i \Delta z$, а его сопротивление равно $R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r}{\Delta z}$. Закон Ома для выделенного кольца имеет вид

$$E_{\text{ind}} = \delta I_2 R = \frac{2\pi r_0}{\lambda} i.$$

Таким образом, получаем систему, описывающую изменения токов:

$$\begin{cases} E_{\text{ист.}} - N \pi a^2 \mu \mu_0 (n I_1 + i)' = 0 \\ \frac{2\pi r_0}{\lambda} i = -\pi a^2 \mu \mu_0 (n I_1 + i)' \end{cases}.$$

⁴ Толщина стенок пренебрежимо мала по сравнению с радиусом трубки. ⁵ Не путать с обычной, «объемной» плотностью!

⁶ Если не сможете вывести это уравнение, то никто не запрещает вам пользоваться им в дальнейшем!

⁷ Получите формулу! ⁸ Не путать с обычной объемной проводимостью! ⁹ Сравните: плотность тока – сила тока пересекающего площадку единичной площади, здесь поверхностная плотность тока – сила тока, пересекающего отрезок единичной длины.

¹⁰ Мы обозначили здесь его x , чтобы не путать с электрической постоянной.