

Условие

Задача 2. «Триатлон»

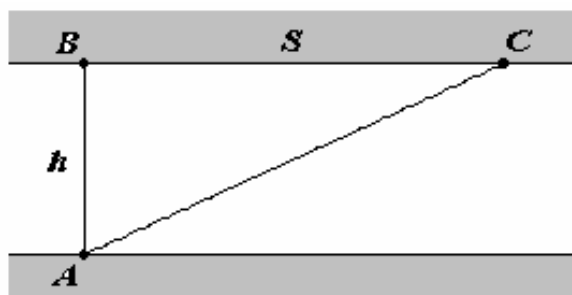
В соревнованиях необходимо преодолеть расстояние от точки A , расположенной на одном берегу канала шириной $h = 100$ м, до точки C , расположенной на другом берегу. Вода в канале неподвижна. Точка B расположена строго напротив точки A . Обозначим расстояние $BC = S$. Один спортсмен, «байдарочник», преодолевает дистанция на байдарке по воде (ясное дело, что байдарочник свою байдарку не бросит и пешком не ходит); второй, «пловец – бегун» может, как плыть по воде, так и бежать по берегу, причем он плавает в два раза медленнее байдарочника, но бежит в два раза быстрее его. Спортсмены стартуют одновременно.

Пусть второй спортсмен решил двигаться сначала вплавь по прямой AB , а затем по берегу бегом по прямой BC .

1.1 В первом туре соревнований точка финиша установлена так, что $S = h$. Найдите отношение времен движения спортсменов $\frac{t_1}{t_2}$ на этом маршруте.

1.2 После поданного протеста, второму спортсмену предоставлено право выбора расстояния S . При каком значении S спортсмены придут к финишу одновременно, если оба спортсмена будут придерживаться прежних стратегий?

1.3 В последнем туре финиш установлен на расстоянии $S = 600$ м от точки B . Какова оптимальная траектория движения «пловца-бегуна» на этой дистанции? Чему будет равно отношение времен движения спортсменов $\frac{t_1}{t_2}$ на этом маршруте, если «пловец-бегун» будет двигаться по «траектории минимального времени», а «байдарочник» своим принципам не изменяет?



Решение

Задача 2. «Кипение»

2.1 Рассмотрим пузырек пара радиуса r (рис. 3), образовавшийся внутри кипящей жидкости. Пузырек увеличивает свой радиус вследствие испарения жидкости внутрь его.

Согласно условию за время Δt с поверхности жидкости S (поверхности пузырька) испарится объем воды ΔV :

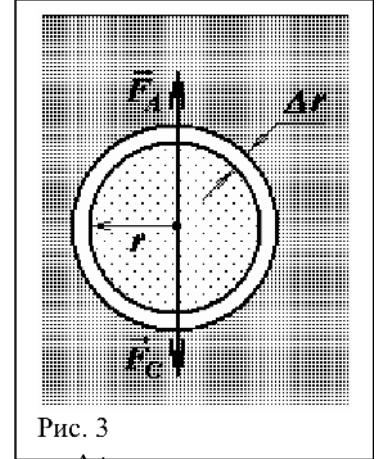
$$\Delta V = NDS\Delta t, \quad (1)$$

где D — «эффективный диаметр» молекулы воды. Соответственно, объем пузырька также должен увеличиться на ΔV . С другой стороны ΔV можно представить как объем тонкой сферы радиусом r и толщиной Δr (см. рис.3):

$$\Delta V = S\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим приращение радиуса пузырька пара Δr за время Δt

$$\Delta r = ND\Delta t = \{\beta = ND\} = \beta\Delta t. \quad (3)$$



Как следует из (3), приращение радиуса Δr пузырька пара за время Δt не зависит от его радиуса r , т.е. радиус пузырька равномерно увеличивается со временем

$$r = \beta \cdot t. \quad (4)$$

2.2 Поскольку плотность пара гораздо меньше плотности воды, то силой тяжести пузырька пара по сравнению с действующей на него силой Архимеда можно пренебречь.

Скорость пузырька v будет расти до тех пор, пока сила Архимеда не уравнивается силой сопротивления со стороны воды (см. рис.3)

$$F_A = F_C,$$

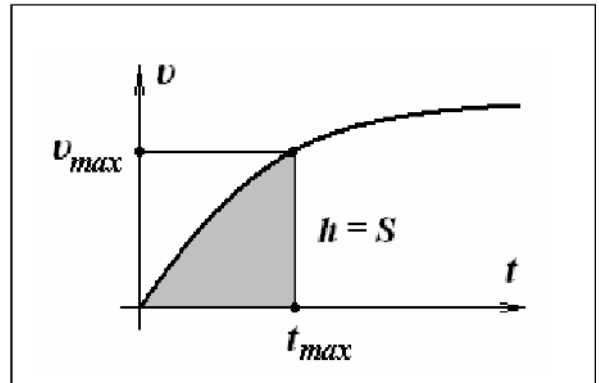
$$\rho_0 g \frac{4}{3} \pi r^3 = C_x \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \pi r^2,$$

$$v^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_x} r = \{(4)\} = \frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_x} \cdot \beta t = \left\{ \gamma = \frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_x} \cdot \beta \right\} = \gamma \cdot t.$$

Подобные приближения, при которых считается, что в каждый момент времени система находится в равновесном (стационарном) состоянии, называются *квазистационарными* (или как модно говорить сегодня «как бы» стационарными). Соответственно в нашем случае

$$v(t) = \sqrt{\gamma t}. \quad (5)$$

График зависимости (5) представлен на рисунке.



2.3 Для нахождения радиуса пузырька r_{max} у поверхности воды необходимо знать время его всплытия t_{max} . Заметим, что при точном решении на рис.4 при $t = t_{max}$ площадь под графиком S (или площадь криволинейной трапеции) должна быть равна глубине сосуда h

$$S(t_{max}) = h.$$

Для оценки этой величины мы поступим достаточно «прямолинейно». При всплытии максимальная скорость пузырька v_{max} достигается у поверхности

$$v_{max} = \sqrt{\gamma t_{max}}. \quad (6)$$

Заменяем кривую на графике зависимости (5) прямой, т.е. будем считать движение пузырька равноускоренным, тогда его средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{0 + v_{max}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma t_{max}}.$$

Тогда

$$h = \langle v \rangle t_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma t_{max}} \cdot t_{max} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (t_{max})^{\frac{3}{2}}. \quad (7)$$

С помощью (7) получаем оценку для времени всплытия t_{max}

$$t_{max} = \left(\frac{2h}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (8)$$

Соответственно с учетом (4) и (8) находим r_{max}

$$r_{max} = \beta \cdot t_{max} = \beta \left(\frac{2h}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{C_x D^2 N^2 h^2}{g}}. \quad (9)$$

Для расчета примем, что диаметр молекулы воды по порядку величины равен диаметру атома водорода $D = 1A = 1,0 \cdot 10^{-10}$ м, тогда из (9) получаем:

$$r_{max} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,1 \text{ мм}.$$