

Условие

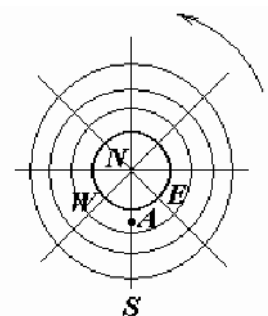
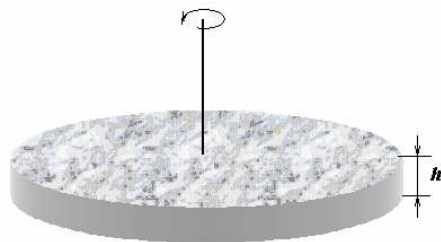
Задача 4. «Плоская Земля»

Древние греки считали, что Земля является плоским диском, вращающимся вокруг своей оси. Примем и мы, что Земля является плоским диском достаточно большого радиуса (скажем, более 40 000 км).

Будем также считать, что период обращения диска вокруг своей оси равен одним суткам. Среднюю плотность материала диска примем равной средней плотности Земли $\rho = 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Гравитационная постоянная равна $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Познакомимся с «географией» плоской Земли. Она напоминает обычную карту земного шара с северным полюсом в центре. Точка пересечения оси вращения планеты с поверхностью диска является северным полюсом N . Далее аналогично: любую радиальную прямую, выходящую из северного полюса будем называть *меридианом*. Легко догадаться, что южного полюса S , как такового, на плоской планете нет — его роль играют все точки края диска. Соответственно, окружности, точки которых находятся на равном расстоянии от полюса, назовем *параллелями*. Движение по параллелям в направлении вращения Земли будет соответствовать движению на восток (E), а в противоположном направлении — на запад (W). Пусть Афины находятся в точке A , расположенной на расстоянии $r_0 = 4,0 \cdot 10^3$ км от северного полюса N .



4.1 Какой должна быть толщина h этого диска, чтобы ускорение свободного падения на северном полюсе N было $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$?

4.2 Для связи с жителями «другой стороны» плоской Земли вдоль оси ее вращения пробурена сквозная тонкая шахта. Если без начальной скорости в шахту опустить камешек, то он, пройдя сквозь шахту, окажется на другой стороне Земли. Найдите максимальную скорость v_{max} камешка при таком движении. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

4.3 Для связи с жителями «своей стороны» плоской Земли из Афин с помощью суперкапальты производится выстрел «снарядом» с начальной скоростью $v_0 = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

а) найдите величину и направление смещения ΔS снаряда от меридиана за время его полета при выстреле вдоль меридиана (рассмотрите два случая).

б) найдите величину и направление смещения ΔS снаряда от параллели за время его полета при выстреле вдоль параллели (рассмотрите два случая).

Решение



Задача 4. «Плоская Земля»

4.1 С точки зрения математики закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона (основной закон электростатики) являются схожими, если считать массу m своеобразным «гравитационным зарядом» или наоборот, представить электрический заряд q «электрической массой»

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{F}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

В продолжение этой аналогии можем сказать, что ускорение свободного падения $\vec{g}$ в теории гравитации является «силовым аналогом» вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

Таким образом, можем составить небольшую табличку «гравитационно-электрических» аналогий.

№	Гравитация	Электростатика
1.	m	q
2.	$\vec{g}$	$\vec{E}$
3.	G	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
4.	$\frac{1}{4\pi G}$	ϵ_0

№	Гравитация	Электростатика
1.	m	q
2.	$\vec{g}$	$\vec{E}$
3.	G	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
4.	$\frac{1}{4\pi G}$	ϵ_0

Напряженность электрического поля E пластины толщиной h , заряженной с постоянной объемной плотностью ρ :

$$E = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}.$$

Следовательно, методом аналогий находим, что ускорение свободного падения на северном полюсе (вдали от краев пластины)

$$g = \frac{\rho h}{2} 4\pi G = 2\pi G \rho h. \quad (1)$$

С помощью (1) находим искомую толщину Земного диска

$$h = \frac{g}{2\pi G \rho} = 4,3 \cdot 10^6 \text{ м} = 4,3 \cdot 10^3 \text{ км}. \quad (2)$$

4.2 При движении камешка внутри шахты на него будет действовать переменная сила тяжести $F(x)$, график зависимости которой от расстояния x до «нулевого сечения» планеты (на глубине $\frac{h}{2}$) представлен на рис. 5.

Работа силы тяжести A равна заштрихованной площади под графиком S (площади прямоугольного треугольника)

$$A = \frac{1}{2} mg \frac{h}{2},$$

где h дается выражением (2). Скорость камешка будет максимальной именно в нулевом сечении, поскольку при дальнейшем движении гравитационные силы начнут его притормаживать.

Согласно теореме о кинетической энергии в этом случае получаем

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = A = mg \frac{h}{4}, \quad (3)$$

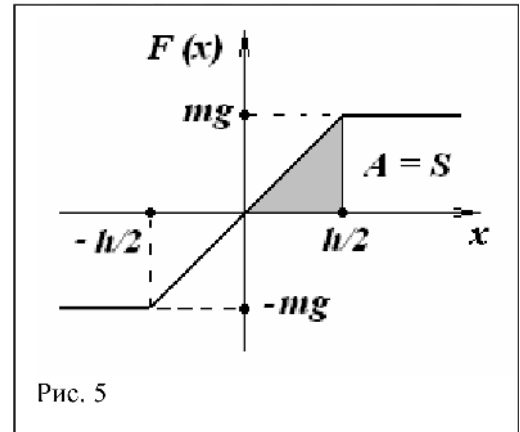
где m — масса камешка. Из (3) находим

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi G \rho}} = 4,6 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4,6 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Как видим из (4) даже плоская Земля разгонит камешек до «полукосмической» скорости.

4.3 а) рассмотрим выстрел из суперкатапульти вдоль меридиана от центра планеты. Афины вращаются вокруг центра Земли с линейной скоростью $v = \omega r$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ —

угловая скорость вращения планеты, $T = 86\,400 \text{ с}$ — период обращения Земли вокруг своей оси.



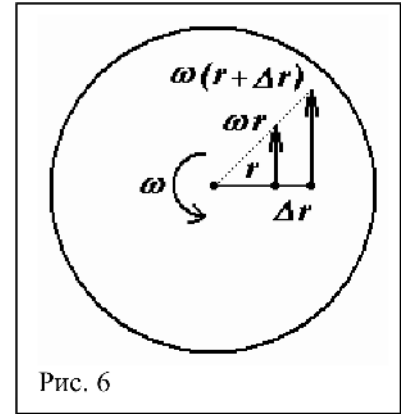


Рис. 6

Соответственно, эту же скорость приобретает снаряд в азимутальном направлении относительного абсолютного наблюдателя, находящегося в центре Земли (рис. 6). Однако линейная скорость вращения точек в районе приземления больше (они дальше!) на величину Δv

$$\Delta v = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r, \quad (5)$$

где $\Delta r = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{v_0^2}{g}$ — дальность полета снаряда на неподвижной Земле. Соответственно за время полета снаряда $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ эти точки «уйдут вперед» на величину

$$\Delta S = \Delta v t = \omega \Delta r \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{4\pi}{T} \frac{v_0^3}{g^2} \sin \alpha = 1,1 \text{ м.} \quad (6)$$

Поскольку меридиан уйдет вперед по направлению вращения Земли, то для наблюдателя снаряд отклонится на запад от меридиана на величину $\Delta S = 1,1 \text{ м}$.

Легко догадаться, что при приближении снаряда к центру Земли линейная скорость вращения точек ее поверхности будет уменьшаться, т.е. теперь, в отличие от предыдущего случая, снаряд будет их «обгонять». Соответственно, меридиан в этом случае «отстанет» на ту же величину $\Delta S = 1,1 \text{ м}$, но в другом направлении. Таким образом, для земного наблюдателя при выстреле из катапульты вдоль меридиана по направлению к центру Земли снаряд отклонится уже на восток, но на ту же величину $\Delta S = 1,1 \text{ м}$.

б) при выстреле вдоль параллели на восток (запад) (рис. 7) снаряд также добавляет (теряет) азимутальный компонент скорости, что меняет его дальность полета. Кроме того, как следует из рис.7, за время полета снаряда точки параллели «повернут» относительно плоскости его полета, вследствие чего точка падения снаряда окажется на некотором расстоянии ΔS от параллели.

Таким образом, дальность полета снаряда Δr при выстреле на восток (по направлению вращения диска)

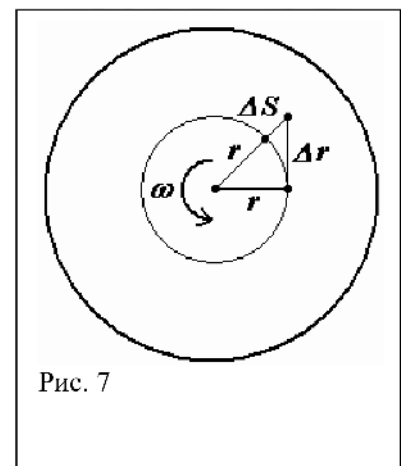


Рис. 7

$$\Delta r = (v_0 \cos \alpha + \omega r) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (7)$$

При выстреле на запад (против направления вращения земного диска)

$$\Delta r = (v_0 \cos \alpha - \omega r) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (8)$$

Заметим, что в этом случае (см. рис.7) смещение снаряда ΔS происходит всегда на юг, т.к. он в любом случае удаляется от центра Земли (параллели). При этом, согласно теореме Пифагора,

$$(r + \Delta S)^2 = r^2 + \Delta r^2. \quad (9)$$

Поскольку $\Delta S \ll r$, то в (9) можно пренебречь слагаемым $(\Delta S)^2$, что приводит к результату

$$\Delta S = \frac{\Delta r^2}{2r} = \frac{(v_0 \cos \alpha \pm \omega r)^2 (2v_0 \sin \alpha)^2}{2rg^2} = \frac{2(v_0 \cos \alpha \pm \omega r)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{rg^2}. \quad (10)$$

Подчеркнем, что при расчетах в (10) следует брать знак «+» в случае выстрела на восток

$$\Delta S = 3,4 \text{ м},$$

и знак «-» в случае выстрела на запад

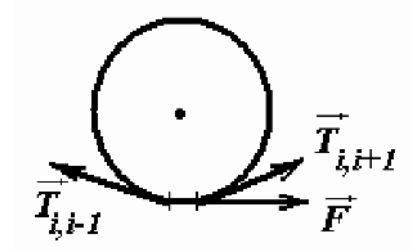
$$\Delta S = 1,3 \text{ м}.$$

Таким образом, для земного наблюдателя при выстреле из суперкатапульты вдоль параллели снаряд отклонится на юг в любом случае, но величины смещений в этом случае будут разными: $\Delta S = 3,4 \text{ м}$ при выстреле на восток и $\Delta S = 1,3 \text{ м}$ при выстреле на запад.

Решения 11 класс.

Задача 1. «Хорошо ли Вы знаете силу трения?»

1.0 Для вывода данного соотношения (уравнения динамики вращательного движения) достаточно рассмотреть уравнение второго закона для небольшого участка цилиндра и затем просуммировать его по всем участкам с учетом третьего закона Ньютона. Так для i -того участка можно записать



$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{T}_{i,i+1} + \vec{T}_{i,i-1},$$

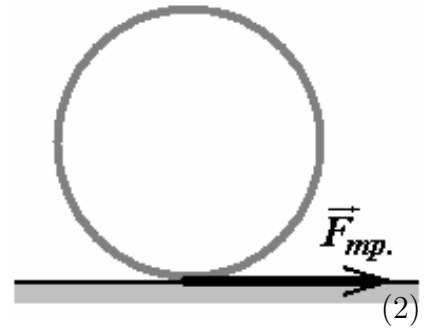
где $\vec{T}_{i,i+1}, \vec{T}_{i,i-1}$ — силы, действующие на i -тый участок со стороны соседей. В проекции на тангенциальное направление для всех участков $|\vec{a}_i| = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$, при суммировании все внутренние силы «исчезнут», останутся только тангенциальные составляющие внешних сил.

1.1 Сила трения, действующая на трубку, сообщает ей линейное ускорение, приводящее к увеличению скорости центра трубки

$$ma = F_{\text{мп}}. \quad (1)$$

Скорость будет изменяться по закону

$$V = \frac{F_{\text{мп}}}{m} t. \quad (2)$$



Эта же сила будет тормозить вращение трубки, согласно уравнению динамики вращательного движения

$$mR \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -F_{\text{мп}}. \quad (3)$$

Поэтому угловая скорость будет уменьшаться по закону

$$\omega = \omega_0 - \frac{F_{\text{мп}}}{Rm} t. \quad (4)$$

Проскальзывание (следовательно, и изменение скоростей) прекратится при выполнении условия $V = \omega R$. Из записанных уравнений следует, что скорость установившегося движения

$$V_{\text{уст}} = \frac{\omega_0 R}{2}. \quad (5)$$

1.2 Если приложенная сила F превышает максимальную силу трения покоя $F_{\text{max}} = \mu mg$, то ускорение бруска находится из уравнения второго закона Ньютона

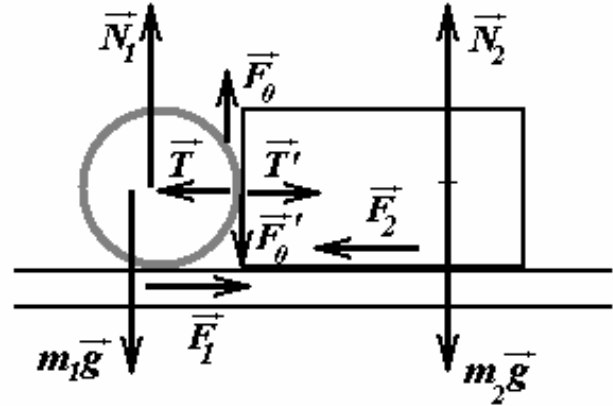
$$a = \frac{F}{m} - \mu g, \quad (6)$$

в противном случае ускорение бруска равно нулю.

1.3 На рисунке изображены силы, действующие на тела (все обозначения традиционны). В проекции на горизонтальное направление уравнения второго закона Ньютона имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - T \\ m_2 a &= -F_2 + T \end{aligned} \quad (1)$$

Выразим действующие силы трения (все они являются силами скольжения): - между цилиндром и бруском



$$F_0 = \mu T, \quad (2)$$

- между цилиндром и горизонтальной поверхностью

$$F_1 = \mu N_1 = \mu(m_1 g - F_0) = \mu(m_1 g - \mu T), \quad (3)$$

- между бруском и поверхностью

$$F_2 = \mu N_2 = \mu(m_2 g + F_0) = \mu(m_2 g + \mu T). \quad (4)$$

Решая эту систему уравнений, получим ускорение тел (если они движутся)

$$a = \mu g \frac{\frac{m_1}{1 + \mu^2} - \frac{m_2}{1 - \mu^2}}{\frac{1}{1 + \mu^2} + \frac{1}{1 - \mu^2}}. \quad (5)$$

Таким образом, брусок начнет двигаться при

$$m_2 < m_1 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \approx 0,92 \text{ кг}.$$

При заданном значении масс ускорение системы равно $a \approx 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.4 Распределение сил в данном случае аналогично рассмотренному ранее. Поэтому если предположить, что все силы являются силами трения скольжения, надо признать справедливой формулу (5) для ускорений. Однако, при $m_1 = m_2$ из нее следует, что ускорение должно быть отрицательным. Следовательно, сила трения F_2 является трением покоя. Поэтому система уравнений для ускорений имеет вид

$$\begin{aligned} m a &= -T + F_1 = -T + \mu(mg - \mu T) \\ m a &= T - F_2 \end{aligned}, \quad (6)$$

к которым необходимо добавить уравнение динамики вращательного движения для второго цилиндра (с учетом $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{a}{R}$)

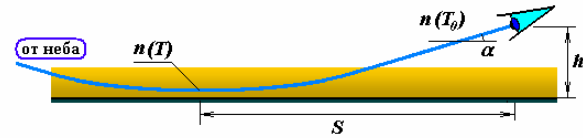
$$mR\frac{a}{R} = F_2 - F_0 = F_2 - \mu T. \quad (7)$$

Из этой системы находим

$$\begin{aligned} F_2 &= ma + \mu T \\ T &= ma + F_2 = 2ma + \mu T \Rightarrow T = \frac{2ma}{1 - \mu} \\ ma &= \mu mg - T(1 + \mu^2) \Rightarrow a = \frac{\mu g}{1 + 2\frac{1 + \mu^2}{1 - \mu}} \approx 0,54 \frac{M}{c^2} \end{aligned}$$

Задача 2. «Хорошо ли Вы знаете закон преломления света?»

2.1 Воздух над дорогой под действием солнечных лучей разогревается, поэтому его показатель преломления меньше, чем в более высоких и холодных слоях. Лучи, идущие от неба, могут испытывать полное отражение от разогретого слоя, что воспринимается как появление на асфальте «луж». Для описания их положения относительно наблюдателя следует рассмотреть условия полного отражения.



Из закона преломления следует условие полного отражения

$$n(T_0) \cos \alpha = n(T) \quad (2.1)$$

Учитывая малость угла α (или, что равносильно $h \ll S$), можно положить

$$\cos \alpha = \frac{S}{\sqrt{S^2 + h^2}} = \left(1 + \frac{h^2}{S^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{h^2}{2S^2}.$$

Далее преобразуем выражение для отношения показателей преломления (при разложении будем учитывать, что отклонение показателя преломления от единицы мало $\frac{a}{T} \ll 1$, а разность температур сравнима со средней температурой воздуха) –

$$\frac{n(T)}{n(T_0)} = \frac{n(T_0 + \Delta T)}{n(T_0)} = \frac{1 + \frac{a}{T_0 + \Delta T}}{1 + \frac{a}{T_0}} \approx 1 + \frac{a}{T_0 + \Delta T} - \frac{a}{T_0} = 1 - \frac{a\Delta T}{T_0(T_0 + \Delta T)}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.1),

$$\frac{a\Delta T}{T_0(T_0 + \Delta T)} = \frac{h^2}{2S^2}$$

получим искомую зависимость

$$S = h\sqrt{\frac{T_0(T_0 + \Delta T)}{2a\Delta T}}$$

График этой зависимости показан на рисунке.

2.2 Так как предмет (нить) находится на расстоянии $2F$ от линзы, то и экран следует расположить на расстоянии $b = 2F = 40$ см за линзой.

2.3 Согласно известной задаче о кажущейся глубине водоема, изображение нити после преломления на задней грани бруска находится на расстоянии $l' = \frac{l}{n}$ от нее. Следовательно, это изображение находится на расстоянии

$$a' = a - l + l' = a - l\frac{n-1}{n} \approx 33,3 \text{ см}$$

от линзы. Используя формулу линзы, получим расстояние b' , на котором следует расположить экран

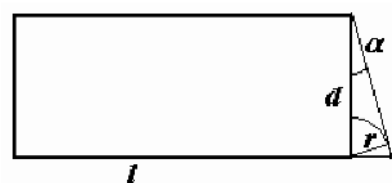
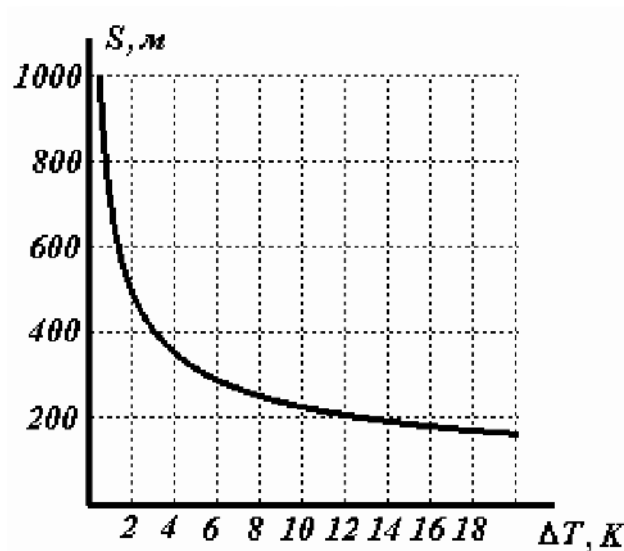
$$b' = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{a'}\right)^{-1} \approx 50 \text{ см.}$$

2.4 Для расчета преломления в данном случае можно воспользоваться принципом Гюйгенса. Вблизи верхней грани бруска световая волна достигнет крайней точки за время

$$t_1 = \frac{n_1 l}{c} = \frac{(n_0 + \delta n)l}{c},$$

а вблизи нижней за время $t_0 = \frac{n_0 l}{c}$.

За разность этих времен за задней гранью, свет, испущенный в нижней точке, пройдет путь $r = c(t_1 - t_0) = \delta n l$. Следовательно, фронт волны (и перпендикулярные ему лучи повернутся на малый угол $\alpha \approx \frac{\delta n l}{d} = 1,0 \cdot 10^{-3}$. Соответственно, изображение на экране сместится вверх на величину $\delta z = \alpha \cdot F = 2,0 \cdot 10^{-2}$ см.



Задача 3. «Что Вы знаете о Солнце?»

3.1 По закону Стефана-Больцмана за время Δt Солнце излучает в пространство тепловую энергию

$$W = \sigma T^4 \cdot S \cdot \Delta t = \sigma T^4 4\pi R^2 \Delta t, \quad (1)$$

где R — радиус Солнца, T — абсолютная температура его поверхности. Распространяясь без потерь в космическом пространстве, эта энергия достигает Земли, «обеспечивая» нас светом и теплом. Выразим W через солнечную постоянную γ . Согласно закону сохранения энергии за промежуток времени Δt через воображаемую сферу радиусом L , в центре которой находится Солнце, должна пройти та же энергия

$$W = \gamma 4\pi L^2 \Delta t. \quad (2)$$

Из (1) – (2) находим искомую абсолютную температуру T поверхности Солнца

$$T^4 = \frac{\gamma L^2}{\sigma R^2} \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\sigma} \cdot \frac{L^2}{R^2}}. \quad (3)$$

Поскольку радиус Солнца R нам не известен, то выразим его через видимый угловой диаметр α Звезды

$$D = 2R = L \cdot \alpha \Rightarrow R = \frac{L \cdot \alpha}{2}. \quad (4)$$

С помощью (3) – (4) находим

$$T = \sqrt[4]{\frac{4\gamma}{\sigma \alpha^2}} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ К}. \quad (5)$$

Подчеркнем, что для расчета в (5) следует подставлять угловой диаметр звезды, выраженный в радианах

$$\alpha \text{ (рад)} = \alpha^\circ \frac{\pi}{180^\circ}.$$

3.2 Вследствие непрерывного излучения энергии Солнце, согласно формуле Эйнштейна, «худеет», уменьшая свою массу. За промежуток времени Δt в термоядерной «солнечной печи» сгорает порция топлива Δm

$$E = W = \gamma 4\pi L^2 \Delta t = \Delta m c^2.$$

Соответственно доля $\eta = \frac{\Delta m}{m} = 10\%$ солнечной массы выгорит за время t , удовлетворяющее условию

$$\gamma 4\pi L^2 t = \eta m c^2 \Rightarrow t = \frac{\eta m c^2}{4\pi \gamma L^2}.$$

Однако производить расчет с помощью (6) мы не можем, так как в условии не указана масса Солнца. Выразим ее, рассматривая II-ой закон Ньютона (основной закон динамики) для движения Земли вокруг Солнца

$$m_3 \omega^2 L = G \frac{m_3 m}{L^2} \Rightarrow m = \frac{\omega^2 L^3}{G} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L^3}{G}.$$

С учетом (7) выражение (6) примет вид

$$t = \frac{\eta c^2}{4\pi\gamma L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L^3}{G} = \frac{\pi\eta L c^2}{\gamma G T^2},$$

где $T = 3,15 \cdot 10^7 c$ — период обращения Земли вокруг Солнца. Расчет по формуле (8) дает

$$t = 4,6 \cdot 10^{19} c.$$

Сравнивая полученный результат с возрастом Вселенной ($t^* \approx 4,5$ млрд лет $= 1,4 \cdot 10^{17} c$) видим, что проблема «похудания» Солнца не представляется столь острой — в рамках многих «земных» задач его массу с неплохой точностью можно считать постоянной.

3.3 Для оценки эффективной толщины h солнечной атмосферы воспользуемся барометрической формулой

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Общепринятым считается следующий подход — за границу атмосферы принимается высота, на которой давление уменьшается в $e = 2,718281\dots$ (e — основание натуральных логарифмов) раз.

С учетом (1) получаем

$$p(h) = \frac{p_0}{e} = p_0 \cdot e^{-1} = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) \Rightarrow h = \frac{RT}{Mg},$$

где $M = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ — молярная масса атомарного (диссоциировавшего) водорода,

$$g = G \frac{m}{R^2} = 270 \frac{\mathcal{M}}{c^2}$$

— ускорение свободного падения на поверхности Солнца.

Расчет дает

$$h = 1,8 \cdot 10^5 \text{ м} = 180 \text{ км}.$$

Как видим при такой большой температуре поверхности Солнца эффективная высота атмосферы оказалась даже меньше земной ($h \approx 300$ км), что можно понять, принимая во внимание величину силы всемирного тяготения на поверхности нашего светила.