

Условие

Задача 2. «Блики на дне»

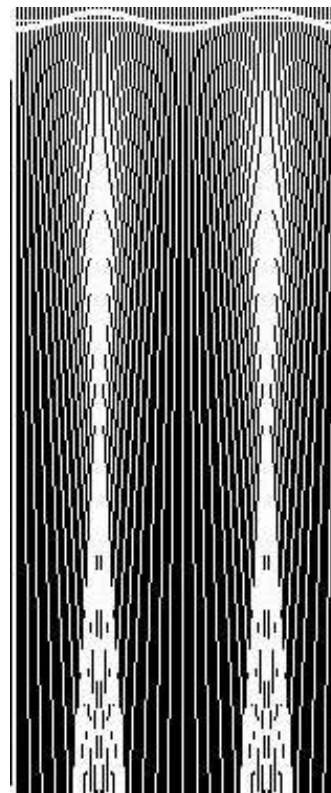


Холодной зимой мы часто и с удовольствием вспоминаем о теплом лете. Представьте – теплое солнечное тихое летнее утро, вы находитесь на берегу озера, поверхность воды слегка колеблется из-за небольших медленно пробегающих волн, на ровном песчаном дне отчетливо видны замысловатые яркие световые полосы и пятна.

Это летом, а сейчас ваша задача – объяснить возникновение этих ярких полос, найти их характеристики и условия возникновения. Итак, по поверхности водоема движется гармоническая волна (длина которой $\lambda = 1,0\text{м}$, амплитуда $a = 5,0\text{см}$) в направлении с востока на запад, солнце находится на юге. Поверхность дна плоская и горизонтальная, глубина водоема h . Показатель преломления воды $n = 1,33$.

1. Постройте примерный график зависимости горизонтальной координаты x_1 точки падения луча на дно, если он попал на поверхность воды в точке с координатой x .
2. Определите, при какой глубине озера световые блики на дне будут наиболее яркими и резкими.
3. Опишите распределение освещенности дна при глубине озера $h_1 = 0,5\text{ м}$, постройте примерный график зависимости освещенности дна от координаты.
4. Опишите распределение освещенности дна при глубине озера $h_1 = 2,5\text{ м}$, найдите ширину световых полос на дне.

Может вам поможет рисунок хода лучей в описываемом случае.

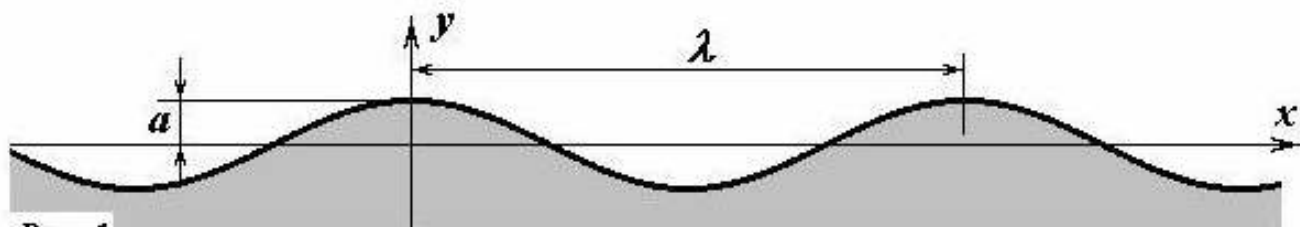


Решение

Задача 2. «Блики на дне»

Очевидно, что блики на дне возникают благодаря преломлению на изогнутой поверхности воды, при этом «горбы» служат своеобразными собирающими линзами, а впадины – рассеивающими линзами.

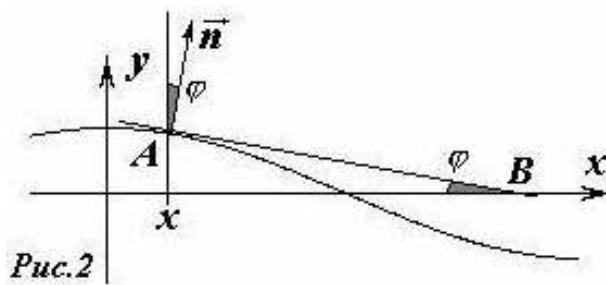
Следовательно, для описания бликов необходимо рассмотреть ход лучей после преломления на поверхности. Заметим, что волна движется перпендикулярно плоскости падения лучей, поэтому можно изучать ход лучей в одной вертикальной плоскости, совпадающей с направлением распространения волны. Кроме того, можно считать, что лучи падают на поверхность вертикально (точнее, можно принимать во внимание только вертикальные составляющие солнечных лучей).



1. Зададим уравнение профиля волны (рис.1):

$$y = a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (1)$$

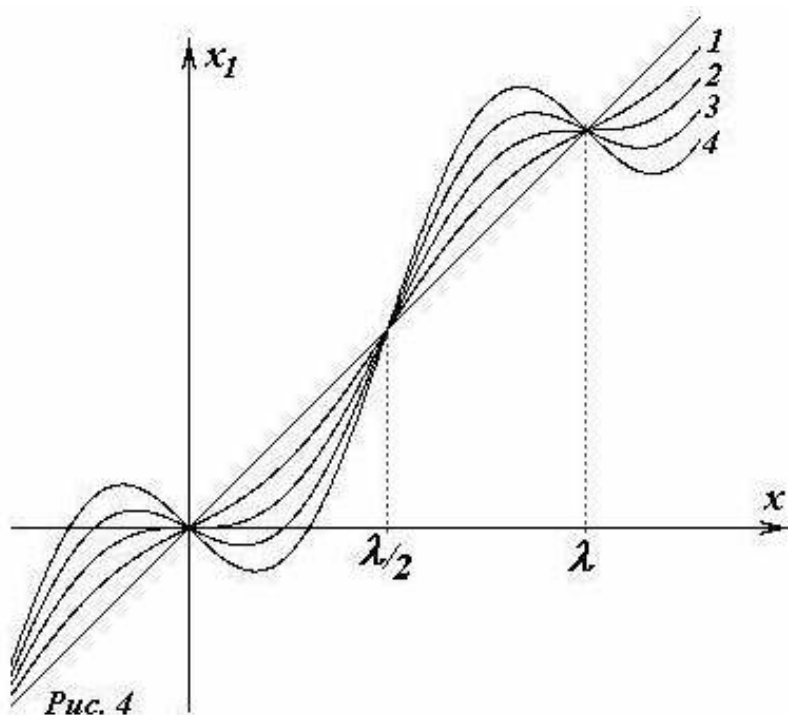
2. Пусть в точке A волны с координатой x вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности волны образует с вертикалью угол φ (рис. 2). Найдем зависимость этого угла от координаты. Понятно, что этот угол равен углу, который образует касательная с горизонталью. Как известно, тангенс угла наклона касательной графику функции к оси аргумента равен первой производной от изучаемой функции. Так как в рассматриваемой задаче длина волны значительно больше ее амплитуды, угол φ можно считать малым, следовательно, здесь и далее тангенс и синус этого угла можно принимать равными самому углу. Таким образом, искомая зависимость имеет вид



$$\varphi(x) = -y' = a \frac{2\pi}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (2)$$

Заметим, что максимальное значение этого угла $\varphi_{\max} = a \frac{2\pi}{\lambda} \approx 0,3$. При этом погрешности замен синусов и тангенсов на значение самого угла не превышает 4%.

Рис.3

$$x_1 = x - h \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx x - h\alpha. \quad (4)$$
$$x_1 = x - h \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (5)$$


3

6. Самой существенной особенностью данных зависимостей является переход от монотонного возрастания к появлению максимумов и минимумов.

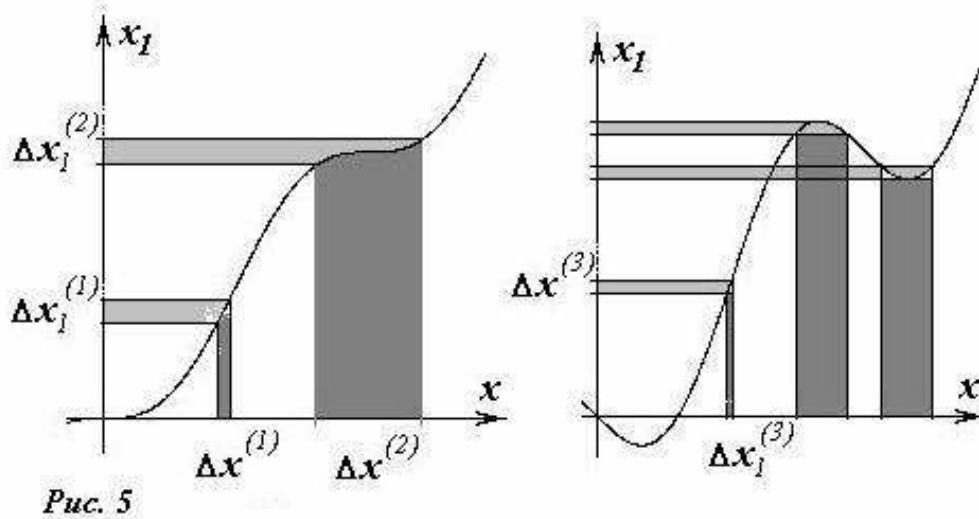


Рис. 5

Действительно, рассмотрим малый интервал (полоску) на дне шириной Δx_1 , на нее попадут лучи, которые пересекли поверхность воды в соответствующем интервале Δx .

Понятно, что чем больше Δx , тем больше света попадет на полоску Δx_1 (рис. 5). Поэтому средняя освещенность полоски дна возле точки x_1 пропорциональна отношению $\frac{\Delta x}{\Delta x_1}$.

Поэтому чем более полого зависимость $x_1(x)$ в данной точке, тем ее освещенность больше. Вблизи максимума она становится очень большой, а вблизи точки перегиба еще больше. Поэтому максимум интенсивности будет достигаться на той глубине, где график зависимости $x_1(x)$ будет иметь точки перегиба.

Кстати, на больших глубинах для расчета интенсивности в некоторых точках дна требуется провести суммирование по трем, пяти и большему числу интервалов на поверхности. Не будем заниматься этой работой. Достаточно, что мы получили метод расчета глубины максимальной фокусировки - в зависимости $x_1(x)$ должны появляться точки перегиба. В приближении малых углов эта зависимость имеет вид (5)

Производная от этой функции равна

$$x'_1 = 1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (6)$$

При малых глубинах h функция (5) экстремумов не имеет (рис. 5), при h больших некоторого критического значения появляются точки минимумов и максимумов. Это произойдет тогда, когда производная функция (6) будет принимать в некоторых точках нулевые значения. Иными словами, когда уравнение $x'_1 = 0$ имеет корни, в зависимости $x_1(x)$ появляются экстремумы - граничное значение между этими двумя случаями - точки перегиба. Итак, условие фокусировки получает абстрактную математическую формулировку - у функции (6) появляются нули!

Как следует из анализа функции (5) если первая производная равна нулю при $x = x_1 = 0$, эта точка будет точкой перегиба, то есть именно в этом случае яркость полосок будет максимальна. Для определения этой «оптимальной» глубины необходимо решить простейшее уравнение

$$1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} = 0, \quad (7)$$

из которого находим глубину «фокусировки»

$$h_0 = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{n}{a(n-1)} \approx 2,0 \text{ м}. \quad (8)$$

Альтернативный способ.

Рассмотрим фокусировку лучей, попадающих в малую область вблизи максимума волны. Для этого будем считать в функции (5) x малым, тогда эта функция упрощается

$$x_1 = x - h \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \approx \left(1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \right) x. \quad (9)$$

Далее замечаем, что если коэффициент в скобках обращается в нуль, то все падающие лучи собираются в точке $x_1 = 0$, то есть фокусируются. Из этого непосредственно следует выражение (8).

8. Глубина водоема $h = 0,5$ м является малой по сравнению с найденной глубиной фокусировки. Поэтому в этом случае функция (5) экстремумов не имеет, поэтому, как было отмечено ранее, освещенность дна пропорциональна $\frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{1}{x'_1}$, и может быть записана в виде

$$I = \frac{I_0}{1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right)}. \quad (10)$$

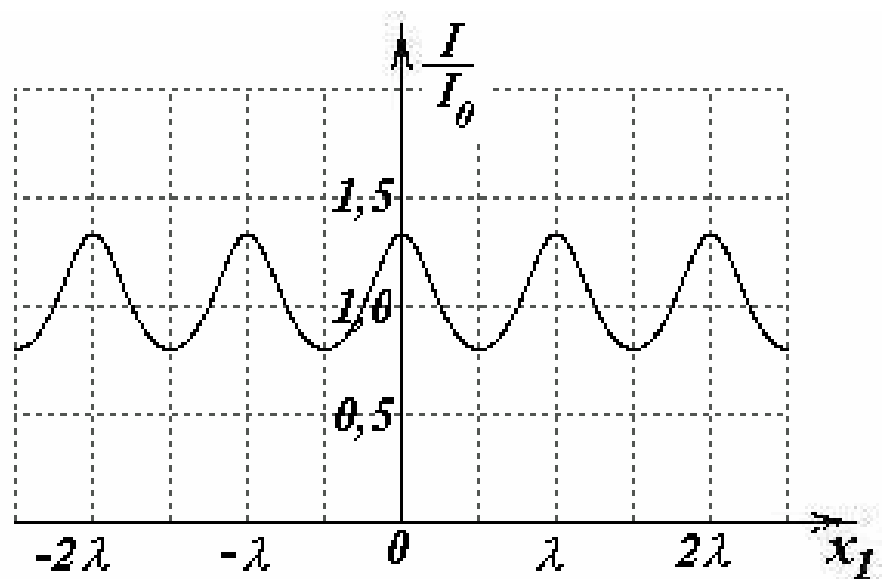


Рис.6

Строго говоря, в это выражение следует подставить x как функцию x_1 , выраженную из функции (5). Однако, учитывая малость углов отклонения лучей от вертикали, малость глубины, для построения схематического графика можно положить $x_1 \approx x$. Требуемый график показан на рис. 6.

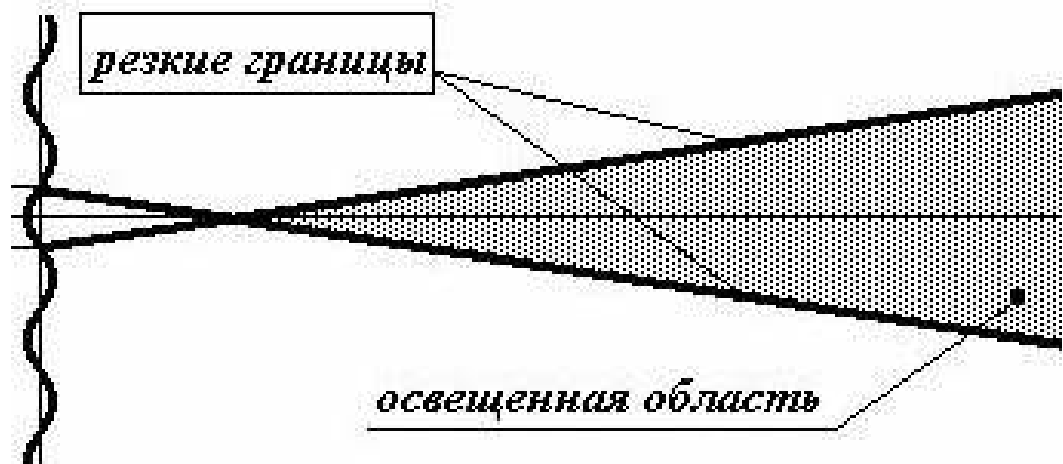


Рис.7

9. При глубине озера $h = 2,5\text{м}$ функция (5) имеет достаточно близко расположенные максимумы и минимумы. Следовательно, на этой глубине каждая яркая полоса «раздваивается», так как каждому минимуму и максимуму соответствует резкое увеличение освещенности. Схематически структура пучка показана на рис.7.

Для определения положения максимума освещенности x_1 на дне необходимо решить систему уравнений (5) – (6). Из условия обращения производной (6) в нуль находим

$$1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\lambda}{2\pi} \arccos \frac{h_0}{h} \approx \pm 0,10\text{м},$$

Подставляя это значения в функцию (5), находим

$$x_1 = x - h \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \approx \mp 1,7 \text{ см.}$$

Окончательно, ширина полосы равна $\Delta x_1 = 2x_1 \approx 3,5 \text{ см.}$