

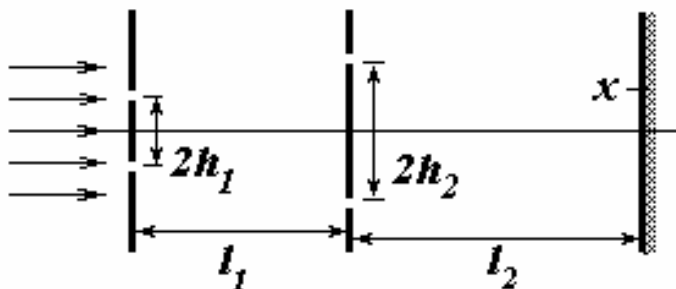
Условие

4. «Двойная интерференция»

Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ падает нормально на непрозрачный экран в котором проделаны две узкие параллельные щели, находящиеся на расстоянии $2h_1$. На расстоянии l_1 от первого экрана расположен второй непрозрачный экран, в котором также проделаны две параллельных щели, находящиеся на расстоянии $2h_2$ друг от друга, причем эти щели параллельны щелям в первом экране. На расстоянии l_2 от второго экрана расположен экран, на котором наблюдают интерференционную картину. Все экраны параллельны друг другу, щели расположены симметрично относительно оси системы.

А) Найдите распределение освещенности на света на последнем экране, как функцию координаты x - расстояния от оси системы.

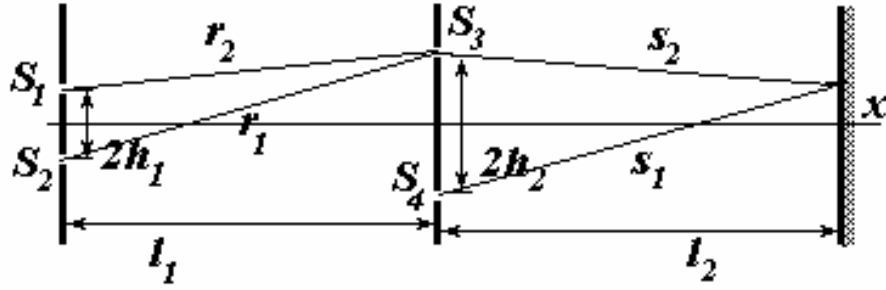
Б) Допустим, что оптическая система используется для измерения длины волны падающего света, для чего проводится измерение зависимости света на последнем экране в фиксированной точке x в зависимости от расстояния $2h_2$ между щелями во втором экране. В какой точке x вы бы рекомендовали проводить такие измерения, чтобы, с одной стороны, погрешность определения длины волны была минимальна, а с другой, интерпретация результатов была не слишком сложна?



При расчетах учитывайте, что расстояния между щелями составляют доли миллиметра, а расстояния между экранами - несколько метров.

Решение

4. «Двойная интерференция»



Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, каждую щель можно рассматривать как источник вторичных волн. Обозначим эти «источники» в первом экране S_1 и S_2 , тогда на расстоянии r от источника вторичные волны описываются функциями

$$A = A_0 \cos(\omega t - kr) \quad , \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ -волновое число. Чтобы найти функцию, описывающую колебания в щелях S_3 и S_4 во втором экране, необходимо просуммировать волны от щелей S_1 и S_2 . Результат суммирования может быть получен разными способами, например, посредством цепочки преобразований

$$\begin{aligned} A_3 &= A_0 \cos(\omega t - kr_1) + A_0 \cos(\omega t - kr_2) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \cos\left(k\frac{r_1 - r_2}{2}\right) \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

При выводе учтено, расстояния r_1 и r_2 отличаются мало, поэтому амплитуды интерферирующих волн можно считать равными. Вычисление разности хода следует проводить с учетом малости расстояний между щелями по сравнению с расстоянием между экранами. С помощью очевидной и традиционной методики получим

$$\begin{aligned} r_1^2 &= l_1^2 + (h_2 + h_1)^2; \quad r_2^2 = l_1^2 + (h_2 - h_1)^2; \\ 2l_1(r_1 - r_2) &= 4h_2h_1; \quad \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = 2\frac{h_2h_1}{l_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полностью аналогично вычисляется функция колебаний в точке x на последнем экране, как сумма вторичных волн от щелей S_3 и S_4 . Так разность хода между этими волнами вычисляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} s_1^2 &= l_2^2 + (h_2 + x)^2; \quad s_2^2 = l_2^2 + (h_2 - x)^2; \\ 2l_2(s_1 - s_2) &= 4h_2x; \quad \Rightarrow \quad s_1 - s_2 = 2\frac{h_2x}{l_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

А суммирование волн выполняется аналогично преобразованиям (2):

$$\begin{aligned}
A_x &= A'_3 \cos(\omega t - k s_1) + A'_3 \cos(\omega t - k s_2) = \\
&= 2A'_3 \cos\left(\omega t - k \frac{s_1 + s_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{s_1 - s_2}{2}\right) .
\end{aligned} \tag{5}$$

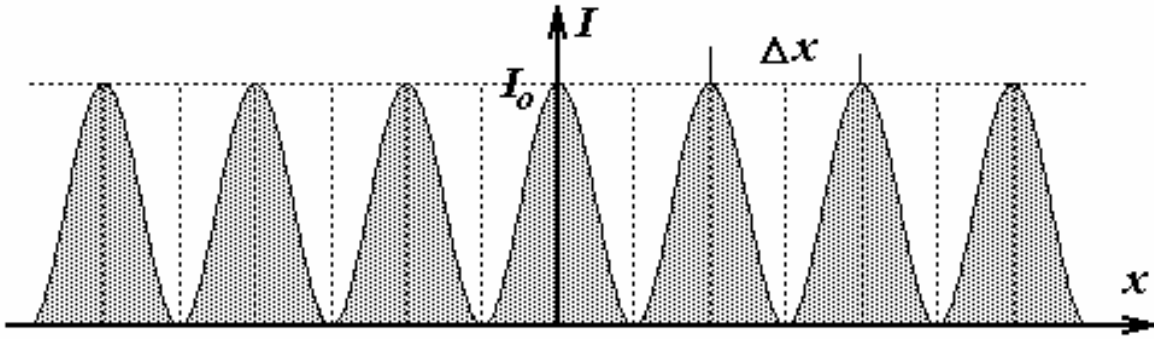
Понятно, что амплитуды интерферирующих волн на последнем экране отличны от амплитуды колебаний в щелях на втором экране, но равны между собой, кроме того, легко показать, что колебания в щелях второго экрана синфазны. Используя полученные ранее выражения, получим амплитуду колебаний в интересующей нас точке

$$A_x = A \cos(\omega t) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{s_1 - s_2}{2}\right) = A \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1 h_2}{l_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_2 x}{l_2}\right) ,$$

Как известно, интенсивность света пропорциональна среднему квадрату амплитуды колебаний, поэтому распределение интенсивности света на последнем экране описывается функцией

$$I_x = \langle A_x^2 \rangle = I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1 h_2}{l_1}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_2 x}{l_2}\right) . \tag{6}$$

Таким образом интерференционная картина представляет собой набор чередующихся равноотстоящих полос, ширина которых не зависит от расстояния между щелями в первом экране. Это расстояние определяет



интенсивность полос.

Эта же функция (6) описывает зависимость интенсивности света в точке x экрана от расстояния между щелями во втором экране.

Для определения оптимального положения для экспериментального изучения зависимости интенсивности от расстояния h_2 , перепишем функцию (6) в виде

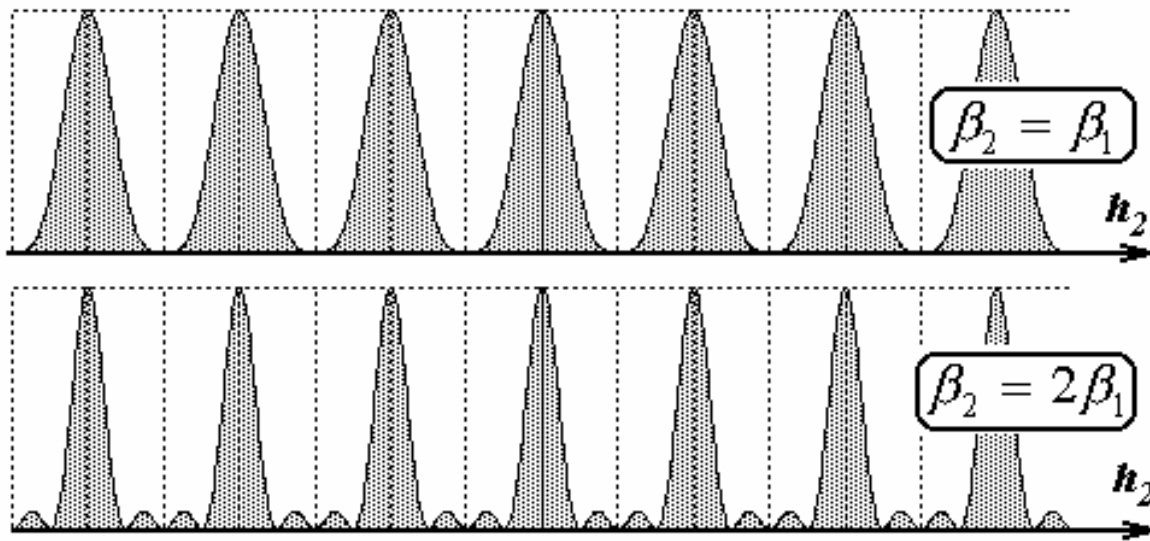
$$I_x(h_2) = I_0 \cos^2(\beta_1 h_2) \cos^2(\beta_2 h_2) , \tag{7}$$

где обозначено $\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1}{l_1}$, $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{l_2}$.

Для выбора оптимального соотношения между параметрами β_1 , β_2 используем следующие критерии:

- 1) Эта функция должна быть достаточно простой, чтобы полученная экспериментальная зависимость легко интерпретировалась). Этого можно достичь если параметры β_1 , β_2 кратны друг другу ($\beta_2 = m\beta_1$, m — целое), тогда зависимость (7) будет периодической.
- 2) Эта функция должна иметь резкие максимумы (что бы точность определения ширины полосы была выше), этого можно достичь при возрастании C . Однако при возрастании x , во-первых, ухудшается видимость интерференционной картины, во-вторых, усложняется зависимость $I_x(h_2)$.

С этих точек зрения наиболее предпочтительными являются значения $\beta_2 = \beta_1$, $\beta_2 = 2\beta_1$. На рисунке представлены эти зависимости.



Переход к следующему $\beta_2 = 3\beta_1$, по-видимому, уже слишком усложнит вид зависимости. Поэтому оптимальным можно признать соотношение $\beta_2 = 2\beta_1$, из которого следует, что приемник целесообразно разместить в точке, находящейся на расстоянии $x = 2\frac{h_1 l_2}{l_1}$.

В заключение можно полюбоваться «трехмерным графиком функции (6).

