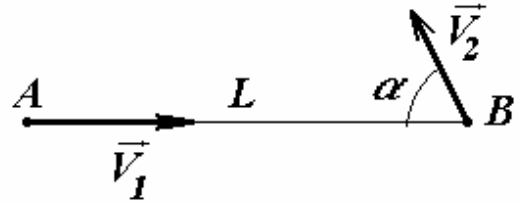


Условие

1. Два корабля движутся с постоянными и одинаковыми по модулю скоростями $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = v$. В некоторый момент времени расстояние между ними оказалось равным L , а их взаимное расположение таким, как показано на рисунке. Угол $\alpha = 60^\circ$. а) Определите минимальное расстояние между кораблями в процессе движения. б) Капитану корабля B необходимо передать сообщение на корабль A . Для этого с корабля спускаю шлюпку, которая может двигаться со скоростью u . За какое минимальное время шлюпка может достичь корабль A , если $u = v$. в) Пусть $u < v$. Через какой максимальный промежуток времени может отправиться шлюпка с корабля B , чтобы она смогла достичь корабль A ? г) Капитан корабля B решает отправить сообщение с помощью пневматической пушки. Какова должна быть минимальная начальная скорость «снаряда - сообщения», чтобы он смог достичь корабль A ? Считайте, что скорость снаряда значительно больше скорости кораблей.

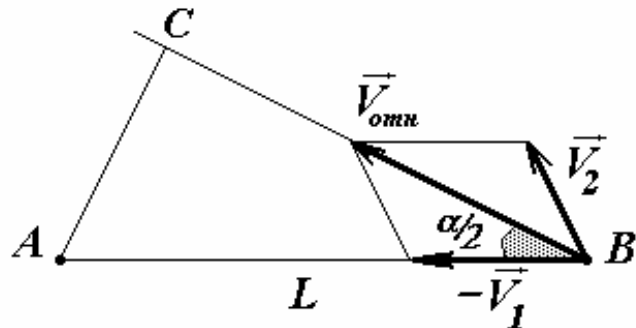


Решение

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с кораблем A . В этой системе корабль B движется с относительной скоростью $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Модуль этой скорости равен

$$|\vec{V}_{\text{отн}}| = 2v \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

а ее вектор направлен под углом $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$ к отрезку AB (см рис). Следовательно, корабль B движется относительно корабля A по прямой BC .



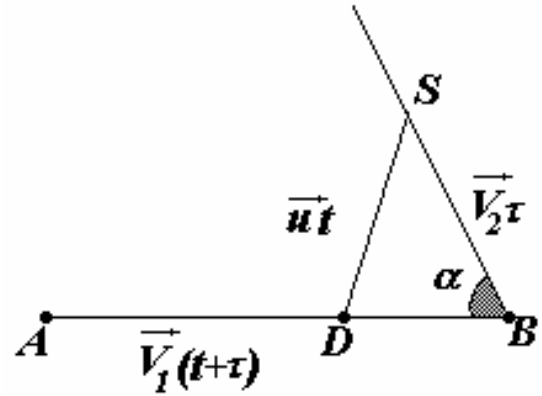
а) Минимальное расстояние между кораблями есть расстояние от точки A до прямой BC , которое равно

$$l_{\min} = L \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}. \quad (2)$$

б) Очевидно, что шлюпка, спущенная с корабля B , достигнет корабля A за минимальное время, если скорость их сближения максимальна, а начальное расстояние между ними минимально. Эти условия будут выполнены, если шлюпку сразу спустить на воду и направить ее навстречу кораблю A . Тогда время, за которое шлюпка достигнет корабля A вычисляется по формуле

$$t_{\min} = \frac{L}{2v}. \quad (3)$$

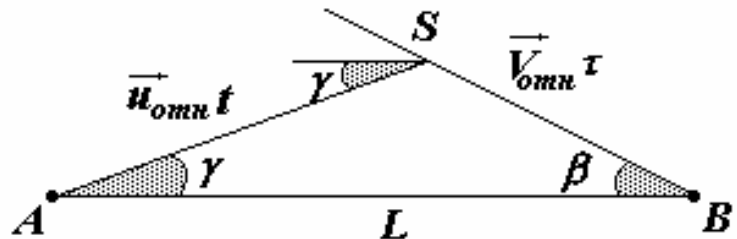
в) Пусть капитан корабля B отправляет шлюпку через время τ (нам необходимо найти его максимально возможное значение) в точке S , а затем через время t шлюпка встречается с кораблем A в точке D (см. рис.). За это время корабль A пройдет путь $|AD| = v(t + \tau)$. Как следует из рис. , чтобы шлюпка и корабль A встретились должно выполняться условие (которое следует из теоремы косинусов для треугольника BSD)



$$(ut)^2 = (v\tau)^2 + (L - v(t + \tau))^2 - 2(v\tau)(L - v(t + \tau)) \cos \alpha. \quad (4)$$

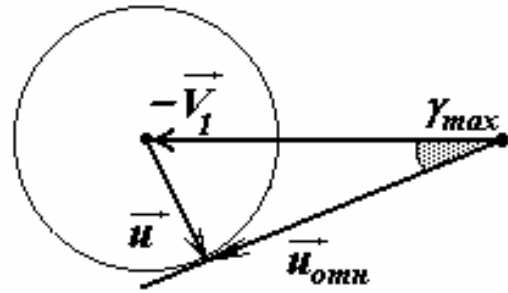
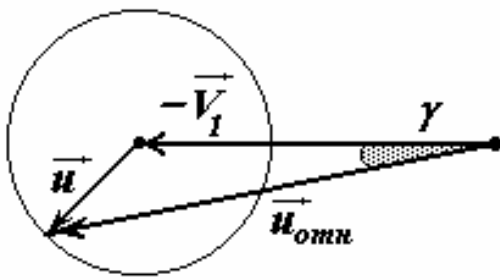
Для того, чтобы найти максимальное значение времени τ необходимо рассмотреть выражение (4) как уравнение относительно величины t и определить условия (значения τ), при которых оно имеет неотрицательное решение. В принципе этот путь решения задачи приведет к успеху, правда путем долгих и громоздких алгебраических преобразований.

Кстати, это же уравнение (при $u = v$) можно использовать для алгебраического обоснования результата, полученного в п. б). Решив это уравнение относительно t , можно получить зависимость времени движения $(t + \tau)$ от времени τ , а затем найти минимум этой функции. Этот способ приводит к уже полученному результату: функция $(t + \tau)$ монотонно возрастает с ростом τ , следовательно ее минимум достигается при $\tau = 0$.



Вернемся к решению пункта в).

Опять рассмотрим движение кораблей в системе отсчета, связанной с кораблем A . В этой системе диаграмма перемещений кораблей и шлюпки имеет вид, показанный на рис. , здесь обозначено $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\vec{u}_{отн} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ - скорость шлюпки, относительно корабля A . На рисунке видно, что время τ (или что то же самое перемещение $V\tau$) будет максимально при максимальном угле γ , между направлением относительной скорости $\vec{u}_{отн}$ и отрезком AB . Максимальное значение этого угла



можно найти, построив диаграмму скоростей (рис.).

Вектор скорости шлюпки $\vec{u}$ может быть направлен под произвольным углом, иными словами его конец может располагаться в любой точке нарисованной окружности. Как следует из рисунка угол γ будет максимален, если вектор $\vec{u}_{отн}$ будет касательным к этой окружности. Таким образом, $\sin \gamma_{\max} = \frac{u}{v}$.

Запишем теорему синусов для треугольника ABS

$$\frac{V \tau_{\max}}{\sin \gamma_{\max}} = \frac{L}{\sin (\pi - \beta - \gamma_{\max})}, \quad (5)$$

где $(\pi - \beta - \gamma_{\max})$ - угол ASB . Из выражения (5) находим

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{L}{V} \cdot \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin (\beta + \gamma_{\max})} = \frac{L}{2v \cos \beta} \cdot \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin \beta \cos \gamma_{\max} + \sin \gamma_{\max} \cos \beta} = \\ &= \frac{L}{v} \cdot \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin 2\beta \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_{\max}} + \sin \gamma_{\max} 2 \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{L}{v} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 1} + 3}. \\ &= \frac{L}{V} \cdot \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin (\beta + \gamma_{\max})} = \frac{L}{2v \cos \beta} \cdot \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin \beta \cos \gamma_{\max} + \sin \gamma_{\max} \cos \beta} \\ &= \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin 2\beta \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_{\max}} + \sin \gamma_{\max} 2 \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 1} + 3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что при

1) $u \rightarrow 0$ $\tau_{\max} \rightarrow 0$, т.е. шлюпку надо сразу спускать на воду и ждать пока к ней подплывет второй корабль;

2) при $u = v$, капитан может подождать в течении времени $\tau_{\max} = \frac{2L}{3V}$;

3) при $u > v$ шлюпка может догнать корабль после любого времени ожидания τ .

г) Скорость снаряда будет минимальна, если он пролетит минимальное расстояние, будучи выпущен под углом 45° к горизонту. Следовательно эту скорость можно найти из уравнения

$$\frac{v_{\min}^2}{g} = l_{\min}, \text{ или}$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{Lg}{2}}.$$